# Somiglianaの正規重力の式

地球の正規重力（normal gravity）は下式で表される．

$$g(\lambda)=\frac{ag_e\cos^2\lambda+bg_p\sin^2\lambda}{\sqrt{a^2\cos^2\lambda+b^2\sin^2\lambda}}$$

ここに，$g_e$ は赤道上の正規重力（normal gravity at the equator），$g_p$ は極の正規重力（normal gravity at the pole），$a$ は子午面断面における赤道半径，すなわち長半径（semi-major axis），$b$ は子午面断面における地球中心と極の距離，すなわち短半径（semi-minor axis），$\lambda$ は緯度（latitude）である．上式はソミリアーナの式とも言う．カルロ・ソミリアーナ（Carlo Somigliana）はイタリアの数学者・物理学者（1860 – 1955）である．この公式の導出過程を以下に記す

## 1.　万有引力の法則と引力ポテンシャル

正規重力の基礎となるのは，ニュートンの万有引力の法則（Newton’s law of universal gravitation）である．二つの物体を質点1と質点2として，次式で表される．

$$f=-\frac{GMm}{r^2} \tag{1-1}$$

ここに，$f$ は引力，$G$ は万有引力定数（constant of gravitation），$M$ は質点1の質量，$m$ は質点2の質量である．$r$ は質点1と質点2の距離であり，質点1が直交座標系の原点(0, 0, 0)にあって，質点2が座標（$x, y, z$）にある場合は，

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{1-2}$$

と表される．式(1-1）の右辺の負号は，力 $f$ が，位置ベクトル（$x, y, z$）と逆向きであること，すなわち原点に向かう力であることを示すためである．式(1-1）の両辺を質点 2 の質量 $m$ で割ると，質点2の単位質量あたりの引力，すなわち加速度は，

$$\frac{f}{m} = -\frac{GM}{r^2} \qquad (1\text{-}3)$$

となる．右辺の分子の $GM$ を地球引力定数（Earth's gravitational constant）と言う．ここで，上式の右辺を距離 $r$ で積分して $V$ とおくと，

$$V = \frac{GM}{r} + const. \qquad (1\text{-}4)$$

となる．この $V$ を引力ポテンシャル（gravitational potential）と言う．ポテンシャルとは位置エネルギーのことである．この引力ポテンシャル $V$ を距離 $r$ で微分すると，

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{GM}{r^2} \qquad (1\text{-}5)$$

となり，式(1-3）の単位質量あたりの引力，すなわち加速度になる．式(1-4）の右辺の定数（*const.*）の値は任意であるが，距離 $r$ が無限大のときに，引力ポテンシャル $V$ が 0 と定義すると，$const. = 0$ となり，

$$V = \frac{GM}{r} \qquad (1\text{-}6)$$

となる．上式が直交座標系や球座標系における，質量 $M$ の質点周りの引力ポテンシャル $V$ の式である．原点（$r = 0$）を除き，微分可能である．上式は調和関数（ラプラス方程式の解）の最も簡単な例である．このように簡単な場合は引力を直接的に求めた方が速いが，質量 $M$ の物体が質点ではなく連続体の場合などは，引力ポテンシャル $V$ を先に求めて，それを座標で微分して引力を求める方が，計算が容易になることが多い．ラプラス方程式（Laplace's equation）の詳細は参考文献 1 を参照.

地球の重力（gravity）とは，引力（gravitation）と地球の自転による遠心力（centrifugal force）との合力である．地球を楕円体で近似して引力ポテンシャル $U$ を求め，遠心力ポテンシャル $\Phi$ を足して重力ポテンシャル $V$ を求め，その $V$ を座標で微分して重力 $g$ を求めるという流れである．重力（gravity）と引力（gravitation）を区別して考えることが重要である．

## 2. 楕円体座標系の重力ポテンシャル

座標系には，下図に示す楕円体座標系（ellipsoidal coordinates）を使う．左側の図に示すように，任意の点 P は座標（ $u, \theta, \lambda$ ）とパラメータ $E$ で表される．$u$ は径 OQ の長さ，$\theta$ は径 $u$ が $z$ 軸となす角度，$\lambda$ は径 $u$ を $xy$ 座標面（赤道面）へ投影した直線と $x$ 軸がなす角度，すなわち経度である．右側の図は，径 $u$ と $z$ 軸を含む平面で切った断面である．座標の範囲は，$u \geqq 0$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$, $0 \leqq \lambda \leqq 2\pi$ である．

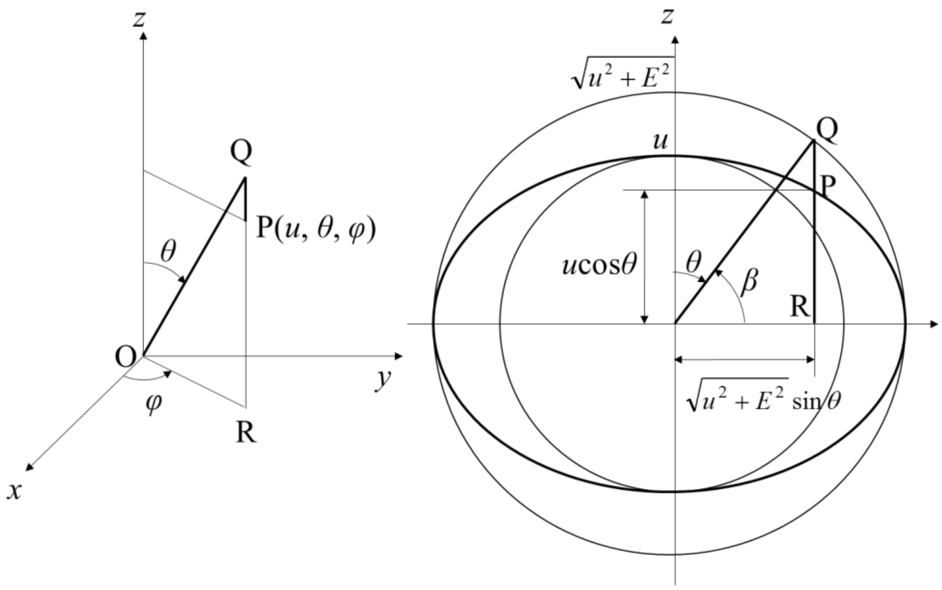


図 1　楕円体座標系

右図の楕円断面の長半径を $a$，z 軸方向の短半径を $b$ とすると，パラメータ $E$ は，

$$E^2 = a^2 - b^2 \tag{2-1}$$

で定義される．この $E$ は線離心率（linear eccentricity）とも呼ばれ，長さの単位を持つ．径 $u = b$ で一定の点 P の集合は，長半径 $a$，短半径 $b$ の楕円体面となる．このとき，点 Q の集合は，楕円体に外接する半径 $a$ の球面となる．

楕円体座標系におけるラプラス方程式の解，すなわち調和関数 $V$ は，

$$V(u,\theta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{P_{nm}\left(i\frac{u}{E}\right)}{P_{nm}\left(i\frac{b}{E}\right)}\left(a_{nm}P_{nm}(\cos\theta)\cos(m\lambda)+b_{nm}P_{nm}(\cos\theta)\sin(m\lambda)\right) \quad (2\text{-}2)$$

$$V(u,\theta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{Q_{nm}\left(i\frac{u}{E}\right)}{Q_{nm}\left(i\frac{b}{E}\right)}\left(a_{nm}P_{nm}(\cos\theta)\cos(m\lambda)+b_{nm}P_{nm}(\cos\theta)\sin(m\lambda)\right) \quad (2\text{-}3)$$

の 2 式のいずれかで表される．ここに，$P_{nm}$ は第 1 種ルジャンドル陪関数，$Q_{nm}$ は第 2 種ルジャンドル陪関数であり，$a_{nm}$ と $b_{nm}$ は任意の定数である．ルジャンドル陪関数（associated Legendre function）の詳細は参考文献 3 を参照．調和関数（harmonic function）の詳細は参考文献 4 を参照.

正規重力を求めるにあたって，以下の条件を仮定する．

- 条件 1）無限遠 $u\ \rightarrow\infty$ で引力ポテンシャル $V\ \rightarrow\ 0$ である．
- 条件 2）ポテンシャル $U, V, \ \Phi$ は $z$ 軸 (自転軸) 回りに軸対称である．
- 条件 3）楕円体表面の重力ポテンシャル $U$ は等しい．（地球の海水面は一つにつながっている）．

変数 $u\ \rightarrow\infty$ のとき，第 1 種ルジャンドル陪関数 $P_{nm}$ は変数 $u$ の $n$ 次式に近づき，第 2 種ルジャンドル陪関数 $Q_{nm}$ は変数 $u$ の $-(n+1)$ 次式に近づく．したがって, 変数 $u\ \rightarrow\infty$ のとき, 式(2-2) は $V\ \rightarrow\infty$ となり，式(2-3) は $V\ \rightarrow\ 0$ となるから，【条件 1】より，楕円体の外側の空間における引力ポテンシャルには式 (2-3) を用いる．さらに，【条件 2】より，$m=0$ である．式(2-3) に $m=0$ を代入すると，

$$\begin{aligned}V(u,\theta,\lambda)&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{0}\frac{Q_{n0}\left(i\frac{u}{E}\right)}{Q_{n0}\left(i\frac{b}{E}\right)}\left(a_{n0}P_{n0}(\cos\theta)\cos(0\cdot\lambda)+b_{n0}P_{n0}(\cos\theta)\sin(0\cdot\lambda)\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q_{n0}\left(i\frac{u}{E}\right)}{Q_{n0}\left(i\frac{b}{E}\right)}a_{n0}P_{n0}(\cos\theta)\end{aligned} \quad (2\text{-}4)$$

となる．変数 λ（経度）の関数ではないから，$u$ と $\theta$ の 2 変数である．また，$m=0$ のとき

の第 1 種と第 2 種のルジャンドル陪関数 $P_{n0}$ と $Q_{n0}$ は，それぞれ第 1 種と第 2 種のルジャンドル関数 $P_n$ と $Q_n$ であるから，

$$V(u,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q_n\left(i\dfrac{u}{E}\right)}{Q_n\left(i\dfrac{b}{E}\right)}A_nP_n(\cos\theta) \tag{2-5}$$

となる．係数 $a_{n0}$ も $A_n$ に書き改めた．ルジャンドル関数（Legendre function）の詳細は参考文献 2 を参照．重力ポテンシャル（gravity potential）$U$ は，引力ポテンシャル $V$ と遠心力ポテンシャル $\Phi$ の和であるから，

$$U(u,\theta)=V(u,\theta)+\Phi(u,\theta) \tag{2-6}$$

と表される．楕円体の自転角速度（angular velocity of the Earth）を $\omega$，自転軸からの距離（腕の長さ）を $r$ とすると，遠心力の加速度は $r\omega^2$ であるから，その遠心力ポテンシャルは $r$ で積分して $1/2\,r^2\omega^2$ である．図 1 より自転軸からの距離は $\sqrt{u^2+E^2}\sin\theta$ であるから，遠心力ポテンシャル $\Phi$ は，

$$\Phi(u,\theta)=\frac{1}{2}\omega^2\left(u^2+E^2\right)\sin^2\theta \tag{2-7}$$

と表される．式(2-5) と式(2-7) を式(2-6) に代入すると，

$$U(u,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q_n\left(i\dfrac{u}{E}\right)}{Q_n\left(i\dfrac{b}{E}\right)}A_nP_n(\cos\theta)+\frac{1}{2}\omega^2\left(u^2+E^2\right)\sin^2\theta \tag{2-8}$$

となる．【条件 3】から，上式において，$U(b,\theta)=U_0$（定数）と置くと，

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_nP_n(\cos\theta)+\frac{1}{2}\omega^2\left(b^2+E^2\right)\sin^2\theta=U_0$$
$$\therefore\sum_{n=0}^{\infty}A_nP_n(\cos\theta)+\frac{1}{2}\omega^2a^2\sin^2\theta=U_0 \tag{2-9}$$

となる．$U_0$ は地球楕円体表面の重力ポテンシャルである．ここで，左辺第 2 項を第 1 種ルジャンドル関数 $P_2$ を使って表す．

$$P_2\left(x\right)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2} \tag{2-10}$$

の変数 $x$ に $\cos\theta$ を代入すると，

$$\begin{aligned}
&P_2\left(\cos\theta\right)=\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\left(1-\sin^2\theta\right)-\frac{1}{2}=1-\frac{3}{2}\sin^2\theta \\
&\therefore \frac{3}{2}\sin^2\theta=1-P_2\left(\cos\theta\right) \\
&\therefore \sin^2\theta=\frac{2}{3}\left(1-P_2\left(\cos\theta\right)\right)
\end{aligned} \tag{2-11}$$

となる．上式を式(2-9) に代入すると，

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}A_nP_n\left(\cos\theta\right)+\frac{1}{2}\omega^2a^2\cdot\frac{2}{3}\left(1-P_2\left(\cos\theta\right)\right)=U_0 \\
&\therefore \sum_{n=0}^{\infty}A_nP_n\left(\cos\theta\right)+\frac{1}{3}\omega^2a^2\left(1-P_2\left(\cos\theta\right)\right)=U_0 \\
&\therefore \sum_{n=0}^{\infty}A_nP_n\left(\cos\theta\right)+\frac{1}{3}\omega^2a^2-\frac{1}{3}\omega^2a^2P_2\left(\cos\theta\right)=U_0 \\
&\therefore A_0P_0\left(\cos\theta\right)+A_1P_1\left(\cos\theta\right)+A_2P_2\left(\cos\theta\right)+\sum_{n=3}^{\infty}A_nP_n\left(\cos\theta\right) \\
&\qquad +\frac{1}{3}\omega^2a^2-\frac{1}{3}\omega^2a^2P_2\left(\cos\theta\right)=U_0
\end{aligned} \tag{2-12}$$

となる．さらに，0 次の第 1 種ルジャンドル関数 $P_0$ は，

$$P_0\left(x\right)=1 \tag{2-13}$$

であるから，

$$\left(A_0+\frac{1}{3}\omega^2a^2-U_0\right)P_0\left(\cos\theta\right)+A_1P_1\left(\cos\theta\right)+\left(A_2-\frac{1}{3}\omega^2a^2\right)P_2\left(\cos\theta\right)$$
$$+\sum_{n=3}^{\infty}A_nP_n\left(\cos\theta\right)=0 \tag{2-14}$$

となり，式(2-9) が第 1 種ルジャンドル関数 $P_\mathrm{n}$ のみを使って表された．第 1 種ルジャンドル関数 $P_n$ は相互に直交しているから，上式がすべての $\theta$ について成り立つためには，すべての第 1 種ルジャンドル関数 $P_n$ の係数が 0 でなくてはならない．よって，$P_\mathrm{n}$ の各係数は，

$$\begin{aligned}&A_0+\frac{1}{3}\omega^2a^2-U_0=0\\&A_1=0\\&A_2-\frac{1}{3}\omega^2a^2=0\\&A_3=A_3=\cdots=0\end{aligned} \tag{2-15}$$

となる．したがって，式(2-5) の係数 $A_n$ は，

$$\begin{aligned}&A_0=U_0-\frac{1}{3}\omega^2a^2\\&A_2=\frac{1}{3}\omega^2a^2\\&A_1=A_3=A_3=\cdots=0\end{aligned} \tag{2-16}$$

となる．これらの係数を式(2-5) に代入すると，引力ポテンシャル $V$ は，

$$V\left(u,\theta\right)=\left(U_0-\frac{1}{3}\omega^2a^2\right)\frac{Q_0\left(i\frac{u}{E}\right)}{Q_0\left(i\frac{b}{E}\right)}+\frac{1}{3}\omega^2a^2\frac{Q_2\left(i\frac{u}{E}\right)}{Q_2\left(i\frac{b}{E}\right)}P_2\left(\cos\theta\right) \tag{2-17}$$

となる．もう少し便利な形に変形する．0 次の第 2 種ルジャンドル関数 $Q_0$ は $|x|>1$ において，指数関数を使って

$$Q_0\left(x\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{7x^7}+\cdots \tag{2-18}$$

と表されるが，逆双曲線関数を使って，

$$Q_0\left(x\right)=\coth^{-1}\left(x\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{7x^7}+\cdots \tag{2-19}$$

とも表される．上式の $x$ に虚数 $ix$ を代入すると，

$$\begin{aligned}Q_0\left(ix\right)&=\coth^{-1}\left(ix\right)=\frac{1}{ix}+\frac{1}{3i^3x^3}+\frac{1}{5i^5x^5}+\frac{1}{7i^7x^7}+\cdots\\&=\frac{1}{ix}-\frac{1}{3ix^3}+\frac{1}{5ix^5}-\frac{1}{7ix^7}+\cdots\\&=\frac{1}{i}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{7x^7}+\cdots\right)\\&=-i\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned} \tag{2-20}$$

となる．ここに，逆三角関数の公式；

$$\begin{aligned}&\tan^{-1}\left(x\right)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots \quad \left|x\right|<1\\&\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{7x^7}+\cdots \quad \left|x\right|>1\end{aligned} \tag{2-21}$$

を使った．よって，式(2-17）の右辺第 1 項の第 2 種ルジャンドル関数 $Q_0$ の比は，

$$\frac{Q_0\left(i\dfrac{u}{E}\right)}{Q_0\left(i\dfrac{b}{E}\right)}=\frac{-i\tan^{-1}\dfrac{E}{u}}{-i\tan^{-1}\dfrac{E}{b}}=\frac{\tan^{-1}\dfrac{E}{u}}{\tan^{-1}\dfrac{E}{b}} \tag{2-22}$$

となり，虚数単位 $i$ が消えて実数になる．次に，右辺第 2 項の第 2 種ルジャンドル関数 $Q_2$ は，

$$\begin{aligned}Q_2\left(x\right)&=\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)Q_0\left(x\right)-\frac{3}{2}x\\&=\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)\coth^{-1}\left(x\right)-\frac{3}{2}x\end{aligned} \tag{2-23}$$

であるから，$x$ に $iu/E$ を代入すると，

$$
\begin{aligned}
Q_2\left(i\frac{u}{E}\right) &= \left(\frac{3}{2}\left(i\frac{u}{E}\right)^2-\frac{1}{2}\right)\coth^{-1}\left(i\frac{u}{E}\right)-\frac{3}{2}\left(i\frac{u}{E}\right)\\
&= \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{-u^2}{E^2}-\frac{1}{2}\right)\left(-i\tan^{-1}\frac{E}{u}\right)-i\frac{3}{2}\cdot\frac{u}{E}\\
&= \frac{i}{2}\left(\left(\frac{3u^2}{E^2}+1\right)\tan^{-1}\frac{E}{u}-\frac{3u}{E}\right)
\end{aligned}
\tag{2-24}
$$

となる．よって，式(2-17）の右辺第 2 項の第 2 種ルジャンドル関数 $Q_2$ の比は，

$$
\frac{Q_2\left(i\frac{u}{E}\right)}{Q_2\left(i\frac{b}{E}\right)} = \frac{\frac{i}{2}\left(\left(\frac{3u^2}{E^2}+1\right)\tan^{-1}\frac{E}{u}-\frac{3u}{E}\right)}{\frac{i}{2}\left(\left(\frac{3b^2}{E^2}+1\right)\tan^{-1}\frac{E}{b}-\frac{3b}{E}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{3u^2}{E^2}\right)\tan^{-1}\frac{E}{u}-\frac{3u}{E}\right)}{\frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{3b^2}{E^2}\right)\tan^{-1}\frac{E}{b}-\frac{3b}{E}\right)}
\tag{2-25}
$$

となり，この比も虚数単位 $i$ が消えて実数になる．ここで，

$$
\begin{aligned}
q(u) &= \frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{3u^2}{E^2}\right)\tan^{-1}\frac{E}{u}-\frac{3u}{E}\right)\\
q_0 = q(b) &= \frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{3b^2}{E^2}\right)\tan^{-1}\frac{E}{b}-\frac{3b}{E}\right)
\end{aligned}
\tag{2-26}
$$

と定義すると，

$$
\frac{Q_2\left(i\frac{u}{E}\right)}{Q_2\left(i\frac{b}{E}\right)} = \frac{q(u)}{q_0}
\tag{2-27}
$$

となり，引力ポテンシャル $V$ は，

$$V(u,\theta)=\left(U_0-\frac{1}{3}\omega^2a^2\right)\frac{\tan^{-1}\dfrac{E}{u}}{\tan^{-1}\dfrac{E}{b}}+\frac{1}{3}\omega^2a^2\frac{q(u)}{q_0}P_2(\cos\theta) \tag{2-28}$$

となる．次に，重力ポテンシャル $U_0$ と質量 $M$ の関係から $U_0$ を消去する．変数 $u$ → ∞のとき，式(2-21）より，

$$\tan^{-1}\frac{E}{u}=\frac{E}{u}-\frac{E^3}{3u^3}+\frac{E^5}{5u^5}-\cdots\rightarrow\frac{E}{u} \tag{2-29}$$

である．また，直交座標系と楕円体座標系の変換式；

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{u^2+E^2}\sin\theta\cos\lambda\\\sqrt{u^2+E^2}\sin\theta\sin\lambda\\u\cos\theta\end{bmatrix} \tag{2-30}$$

の関係より，

$$\begin{aligned}r^2&=x^2+y^2+z^2\\&=\left(u^2+E^2\right)\sin^2\theta+u^2\cos^2\theta\\&=u^2+E^2\sin^2\theta\\\therefore u^2&=r^2-E^2\sin^2\theta\end{aligned} \tag{2-31}$$

であるから，

$$\frac{E}{u}=\frac{E}{\sqrt{r^2-E^2\sin^2\theta}}\rightarrow\frac{E}{r} \tag{2-32}$$

となる．よって，式(2-29）と式(2-32）より，

$$\tan^{-1}\frac{E}{u}=\frac{E}{u}-\frac{E^3}{3u^3}+\frac{E^5}{5u^5}-\cdots\rightarrow\frac{E}{r} \tag{2-33}$$

となる．また，式(2-26）より，

$$
\begin{aligned}
q(u) &= \frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{3u^2}{E^2}\right)\left(\frac{E}{u}-\frac{E^3}{3u^3}+\frac{E^5}{5u^5}-\frac{E^7}{7u^7}+\cdots\right)-\frac{3u}{E}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{E}{u}-\frac{E^3}{3u^3}+\frac{E^5}{5u^5}-\cdots\right)+\left(\frac{3u^2}{E^2}\cdot\frac{E}{u}-\frac{3u^2}{E^2}\cdot\frac{E^3}{3u^3}+\frac{3u^2}{E^2}\cdot\frac{E^5}{5u^5}-\cdots\right)-\frac{3u}{E}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{E}{u}-\frac{E^3}{3u^3}+\frac{E^5}{5u^5}-\cdots\right)+\left(\frac{3u}{E}-\frac{E}{u}+\frac{3E^3}{5u^3}-\cdots\right)-\frac{3u}{E}\right) \\
&= \frac{2E^3}{15u^3}+\cdots
\end{aligned} \tag{2-34}
$$

となる．よって，

$$
\frac{q(u)}{q_0} \to \frac{\frac{4}{15}\left(\frac{E}{u}\right)^3}{\frac{4}{15}\left(\frac{E}{b}\right)^3} = \left(\frac{b}{u}\right)^3 \to \left(\frac{b}{r}\right)^3 \tag{2-35}
$$

となる．式(2-33）が(1/$r$）の 1 次式であるのに対して，上式は(1/$r$）の 3 次式であるから，式(2-28）の第 2 項は無視できることがわかる．よって，引力ポテンシャル $V$ は,

$$
V \to \left(U_0 - \frac{1}{3}\omega^2 a^2\right)\frac{\frac{E}{r}}{\tan^{-1}\frac{E}{b}} \tag{2-36}
$$

となる．上式と万有引力のポテンシャルの式(1-6）を比較すると，

$$
\begin{aligned}
& V = \left(U_0 - \frac{1}{3}\omega^2 a^2\right)\frac{E}{\tan^{-1}\frac{E}{b}}\cdot\frac{1}{r} = \frac{GM}{r} \\
& \therefore \left(U_0 - \frac{1}{3}\omega^2 a^2\right)\frac{E}{\tan^{-1}\frac{E}{b}} = GM \\
& \therefore U_0 - \frac{1}{3}\omega^2 a^2 = \frac{GM}{E}\tan^{-1}\frac{E}{b} \\
& \therefore U_0 = \frac{GM}{E}\tan^{-1}\frac{E}{b} + \frac{1}{3}\omega^2 a^2
\end{aligned} \tag{2-37}
$$

となり，定数 $U_0$ が求められた．上式を式(2-28）に代入すると，引力ポテンシャル $V$ は,

$$V=\left(\frac{GM}{E}\tan^{-1}\frac{E}{b}+\frac{1}{3}\omega^2a^2-\frac{1}{3}\omega^2a^2\right)\frac{\tan^{-1}\frac{E}{u}}{\tan^{-1}\frac{E}{b}}+\frac{1}{3}\omega^2a^2\frac{q(u)}{q_0}P_2(\cos\theta)$$

$$\therefore V=\frac{GM}{E}\tan^{-1}\frac{E}{u}+\frac{1}{3}\omega^2a^2\frac{q(u)}{q_0}P_2(\cos\theta) \qquad (2\text{-}38)$$

となる．なお，右辺第 2 項には自転角速度$\omega$が含まれているが，上式はあくまで引力ポテンシャルの式であることに注意．重力ポテンシャル $U$ は，上式の引力ポテンシャル $V$ に式(2-7）の遠心力ポテンシャル$\Phi$を足して，

$$U=\frac{GM}{E}\tan^{-1}\frac{E}{u}+\frac{1}{3}\omega^2a^2\frac{q(u)}{q_0}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\omega^2\left(u^2+E^2\right)\sin^2\theta$$

$$\therefore U=\frac{GM}{E}\tan^{-1}\frac{E}{u}+\frac{1}{2}\omega^2a^2\frac{q(u)}{q_0}\left(\cos^2\theta-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\omega^2\left(u^2+E^2\right)\sin^2\theta \qquad (2\text{-}39)$$

となる．ついに重力ポテンシャル $U$ の式が求められた．

## 3. 正規重力

重力は，重力ポテンシャル $U$ を偏微分して求める．直交座標系内の微小距離要素 $ds$ は，

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2 \qquad (3\text{-}1)$$

であるが，楕円体座標系内の微小距離要素 $ds$ は，

$$ds^2=\frac{u^2+E^2\cos^2\theta}{u^2+E^2}du^2+\left(u^2+E^2\cos^2\theta\right)d\theta^2+\left(u^2+E^2\right)\sin^2\theta d\lambda^2 \qquad (3\text{-}2)$$

と表される．詳しくは参考文献 1 を参照．上式より，

$$\frac{\partial s_u}{\partial u}=\sqrt{\frac{u^2+E^2\cos^2\theta}{u^2+E^2}} \qquad (3\text{-}3)$$

$$\frac{\partial s_\theta}{\partial \theta}=\sqrt{u^2+E^2\cos^2\theta} \qquad (3\text{-}4)$$

$$\frac{\partial s_\lambda}{\partial \lambda} = \sqrt{u^2 + E^2}\sin\theta \tag{3-5}$$

となる．よって，重力加速度 $f$ と重力ポテンシャル $U$ の関係は，

$$f_u\left(u,\theta\right) = \frac{\partial u}{\partial s_u}\cdot\frac{\partial U\left(u,\theta\right)}{\partial u} = \sqrt{\frac{u^2+E^2}{u^2+E^2\cos^2\theta}}\cdot\frac{\partial U\left(u,\theta\right)}{\partial u} \tag{3-6}$$

$$f_\theta\left(u,\theta\right) = \frac{\partial \theta}{\partial s_\theta}\cdot\frac{\partial U\left(u,\theta\right)}{\partial \theta} = \frac{1}{\sqrt{u^2+E^2\cos^2\theta}}\cdot\frac{\partial U\left(u,\theta\right)}{\partial \theta} \tag{3-7}$$

$$f_\lambda\left(u,\theta\right) = \frac{\partial \theta}{\partial s_\lambda}\cdot\frac{\partial U\left(u,\theta\right)}{\partial \lambda} = \frac{1}{\sqrt{u^2+E^2}\sin\theta}\cdot\frac{\partial U\left(u,\theta\right)}{\partial \lambda} = 0 \tag{3-8}$$

となる．ここに，$f_u$ は楕円の法線方向の重力加速度，$f_\theta$ は緯度方向の重力加速度，$f_\lambda$ は経度方向の重力加速度である．重力ポテンシャル $U$ の式（2-39）は経度 λ の関数ではないから，$f_\lambda$ は 0 である．重力ポテンシャルの式（2-39）を座標 $u$ で偏微分すると，

$$\frac{\partial U\left(u,\theta\right)}{\partial u} = \frac{GM}{E}\cdot\frac{d}{du}\left(\tan^{-1}\frac{E}{u}\right) + \frac{1}{2}\omega^2 a^2\frac{1}{q_0}\cdot\frac{dq\left(u\right)}{du}\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right) + \omega^2 u\sin^2\theta \tag{3-9}$$

となる．変数が分離されているから，偏微分記号ではなく(常)微分記号となる．上式の右辺第 1 項の微分は，逆三角関数の微分の公式；

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right) = \frac{1}{1+x^2} \tag{3-10}$$

を使うと，

$$\frac{GM}{E}\cdot\frac{d}{du}\left(\tan^{-1}\frac{E}{u}\right) = \frac{GM}{E}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{E}{u}\right)^2}\left(-\frac{E}{u^2}\right) = -\frac{GM}{u^2+E^2} \tag{3-11}$$

となる．式（3-9）の右辺第 2 項の微分を求めると，

$$
\begin{aligned}
\frac{dq(u)}{du} &= \frac{1}{2}\frac{d}{du}\left(\left(1+\frac{3u^2}{E^2}\right)\tan^{-1}\frac{E}{u}-\frac{3u}{E}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{6u}{E^2}\tan^{-1}\frac{E}{u}+\left(1+\frac{3u^2}{E^2}\right)\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{E}{u}\right)^2}\cdot\left(-\frac{E}{u^2}\right)-\frac{3}{E}\right) \\
&= \frac{3u}{E^2}\tan^{-1}\frac{E}{u}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{3u^2}{E^2}\right)\cdot\frac{-E}{u^2+E^2}-\frac{3}{2E} \\
&= \frac{3u}{E^2}\tan^{-1}\frac{E}{u}-\frac{E}{2\left(u^2+E^2\right)}\left(1+\frac{3u^2}{E^2}+\frac{3}{E^2}\left(u^2+E^2\right)\right) \\
&= \frac{3u}{E^2}\tan^{-1}\frac{E}{u}-\frac{E}{2\left(u^2+E^2\right)}\left(1+\frac{3u^2}{E^2}+\frac{3u^2}{E^2}+3\right) \\
&= \frac{3u}{E^2}\tan^{-1}\frac{E}{u}-\frac{E}{u^2+E^2}\left(2+\frac{3u^2}{E^2}\right) \\
&= \frac{3u}{E^2}\tan^{-1}\frac{E}{u}-\frac{E}{u^2+E^2}\left(3\left(1+\frac{u^2}{E^2}\right)-1\right) \\
&= \frac{3u}{E^2}\tan^{-1}\frac{E}{u}-\frac{E}{u^2+E^2}\left(3\frac{E^2+u^2}{E^2}-1\right) \\
&= \frac{3u}{E^2}\tan^{-1}\frac{E}{u}-\frac{3}{E}+\frac{E}{u^2+E^2} \\
&= \frac{3}{E}\left(\frac{u}{E}\tan^{-1}\frac{E}{u}-1\right)+\frac{E}{u^2+E^2} \\
&= \frac{E}{u^2+E^2}\left(\frac{u^2+E^2}{E}\cdot\frac{3}{E}\left(\frac{u}{E}\tan^{-1}\frac{E}{u}-1\right)+1\right) \\
&= \frac{E}{u^2+E^2}\left(3\left(1+\frac{u^2}{E^2}\right)\left(\frac{u}{E}\tan^{-1}\frac{E}{u}-1\right)+1\right) \\
&= \frac{-E}{u^2+E^2}\left(3\left(1+\frac{u^2}{E^2}\right)\left(1-\frac{u}{E}\tan^{-1}\frac{E}{u}\right)-1\right)
\end{aligned}
\tag{3-12}
$$

となる．ここで，右辺の括弧の中を新たに $q'(u)$ と定義すると，

$$
q'(u)=3\left(1+\frac{u^2}{E^2}\right)\left(1-\frac{u}{E}\tan^{-1}\frac{E}{u}\right)-1 \tag{3-13}
$$

$$
\frac{dq(u)}{du}=-\frac{E}{u^2+E^2}q'(u) \tag{3-14}
$$

となる．$q'$という表記から $q$ の微分のように見えるが，そうではない点に注意を要する．
式（3-11）と式（3-14）を式（3-9）に代入すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial U(u,\theta)}{\partial u} &= -\frac{GM}{u^2+E^2}+\frac{1}{2}\omega^2 a^2\frac{1}{q_0}\cdot\frac{-E}{u^2+E^2}q'(u)\left(\cos^2\theta-\frac{1}{3}\right)+\omega^2 u\sin^2\theta\\ &= -\frac{GM}{u^2+E^2}-\frac{\omega^2 a^2 E}{u^2+E^2}\cdot\frac{q'(u)}{q_0}\left(\frac{1}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{6}\right)+\omega^2 u\sin^2\theta\end{aligned} \tag{3-15}$$

となる．上式を式（3-6）に代入すると，

$$f_u(u,\theta) = -\sqrt{\frac{u^2+E^2}{u^2+E^2\cos^2\theta}}\left(\begin{aligned}&\frac{GM}{u^2+E^2}+\frac{\omega^2 a^2 E}{u^2+E^2}\cdot\frac{q'(u)}{q_0}\left(\frac{1}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{6}\right)\\ &-\omega^2 u\sin^2\theta\end{aligned}\right) \tag{3-16}$$

となる．楕円体の表面における $u$ 方向の重力成分は，座標 $u=b$ を代入して，

$$\begin{aligned}f_u(b,\theta) &= -\frac{a}{\sqrt{b^2+E^2\cos^2\theta}}\left(\frac{GM}{a^2}+\frac{\omega^2 a^2 E}{a^2}\cdot\frac{q'_0}{q_0}\left(\frac{1}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{6}\right)-\omega^2 b\sin^2\theta\right)\\ &= -\frac{a}{\sqrt{b^2+E^2\cos^2\theta}}\cdot\frac{GM}{a^2}\left(1+\frac{\omega^2 a^2 E}{GM}\cdot\frac{q'_0}{q_0}\left(\frac{1}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{6}\right)-\frac{\omega^2 a^2 b}{GM}\sin^2\theta\right)\\ &= -\frac{GM}{a\sqrt{b^2+E^2\cos^2\theta}}\left(1+\frac{\omega^2 a^2 E}{GM}\cdot\frac{q'_0}{q_0}\left(\frac{1}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{6}\right)-\frac{\omega^2 a^2 b}{GM}\sin^2\theta\right)\end{aligned} \tag{3-17}$$

となる．ここに，

$$q'_0 = q'(b) = 3\left(1+\frac{b^2}{E^2}\right)\left(1-\frac{b}{E}\tan^{-1}\frac{E}{b}\right)-1 \tag{3-18}$$

である．式（2-1）の関係を使った．ここで，右辺の分母の中の式を変形すると，

$$\begin{aligned}b^2+E^2\cos^2\theta &= b^2+\left(a^2-b^2\right)\cos^2\theta\\ &= a^2\cos^2\theta+b^2\left(1-\cos^2\theta\right)\\ &= a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta\end{aligned} \tag{3-19}$$

となる．さらに，式（3-17）の右辺の括弧の中の第 3 項の定数を $m$ と定義すると，

 

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} \tag{3-20}$$

この $m$ は，遠心力と引力の大きさの比を表す無次元数である．
式（3-19）と式（3-20）を式（3-17）に代入すると，

$$\begin{aligned} f_u(b,\theta) &= -\frac{GM}{a\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}\left(1 + \frac{mE}{b}\cdot\frac{q'_0}{q_0}\left(\frac{1}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{6}\right) - m\sin^2\theta\right) \\ &= -\frac{GM}{a\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}\left(1 + m\frac{e'q'_0}{q_0}\left(\frac{1}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{6}\right) - m\sin^2\theta\right) \end{aligned} \tag{3-21}$$

となる．ここに，後述の式（3.38）の第 2 離心率 $e'$ を使った．上式に，角度 $\theta = 90°$ を代入した重力，すなわち赤道の重力を $f_a$ とし，角度 $\theta = 0$ を代入した重力，すなわち極の重力を $f_b$ とすると，

$$f_a = g\left(b, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{GM}{ab}\left(1 + m\frac{e'q'_0}{q_0}\left(0 - \frac{1}{6}\right) - m\cdot 1\right) = -\frac{GM}{ab}\left(1 - m - \frac{m}{6}\cdot\frac{e'q'_0}{q_0}\right) \tag{3-22}$$

$$f_b = g(b,0) = -\frac{GM}{a^2}\left(1 + m\frac{e'q'_0}{q_0}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) - m\cdot 0\right) = -\frac{GM}{a^2}\left(1 + \frac{m}{3}\cdot\frac{e'q'_0}{q_0}\right) \tag{3-23}$$

となる．式（3-21）の括弧の中の式を，三角関数の $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ の関係を使って変形すると，

$$\begin{aligned} &1 + m\frac{e'q'_0}{q_0}\left(\frac{1}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{6}\right) - m\sin^2\theta \\ &= 1 - \frac{m}{6}\cdot\frac{e'q'_0}{q_0} + \frac{m}{2}\cdot\frac{e'q'_0}{q_0}\cos^2\theta - m\sin^2\theta \\ &= \left(1 - \frac{m}{6}\cdot\frac{e'q'_0}{q_0}\right)\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + \frac{m}{2}\cdot\frac{e'q'_0}{q_0}\cos^2\theta - m\sin^2\theta \\ &= \left(1 - \frac{m}{6}\cdot\frac{e'q'_0}{q_0} + \frac{m}{2}\cdot\frac{e'q'_0}{q_0}\right)\cos^2\theta + \left(1 - \frac{m}{6}\cdot\frac{e'q'_0}{q_0} - m\right)\sin^2\theta \\ &= \left(1 + \frac{m}{3}\cdot\frac{e'q'_0}{q_0}\right)\cos^2\theta + \left(1 - m - \frac{m}{6}\cdot\frac{e'q'_0}{q_0}\right)\sin^2\theta \\ &= -\frac{f_b}{GM}\cos^2\theta - \frac{f_a}{GM}\sin^2\theta \end{aligned} \tag{3-24}$$

となる．上式を式（3-21）に代入すると，

$$
\begin{aligned}
f_u(b,\theta) &= -\frac{GM}{a\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}\left(-\frac{f_b}{GM}\cos^2\theta - \frac{f_a}{GM}\sin^2\theta\right) \\
\therefore f_u(b,\theta) &= \frac{f_b\cos^2\theta + f_a\sin^2\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}
\end{aligned}
\tag{3-25}
$$

となる．次に，楕円体の重力ポテンシャルの式（2-39）を角度 $\theta$ で偏微分すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U(u,\theta)}{\partial\theta} &= 0 - \frac{1}{2}\omega^2 a^2\frac{q(u)}{q_0}\cdot 2\cos\theta\sin\theta + \frac{1}{2}\omega^2\left(u^2 + E^2\right)\cdot 2\sin\theta\cos\theta \\
&= -\omega^2\left(a^2\frac{q(u)}{q_0} - \left(u^2 + E^2\right)\right)\cos\theta\sin\theta
\end{aligned}
\tag{3-26}
$$

となる．上式を式（3-7）に代入すると，

$$
\begin{aligned}
f_\theta(u,\theta) &= \frac{1}{\sqrt{u^2 + E^2\cos^2\theta}}\cdot\frac{\partial U(u,\theta)}{\partial\theta} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{u^2 + E^2\cos^2\theta}}\omega^2\left(a^2\frac{q(u)}{q_0} - \left(u^2 + E^2\right)\right)\cos\theta\sin\theta
\end{aligned}
\tag{3-27}
$$

となる．楕円体の表面における $\theta$ 方向の重力成分は，$u = b$ を代入して，

$$
\begin{aligned}
f_\theta(b,\theta) &= -\frac{1}{\sqrt{b^2 + E^2\cos^2\theta}}\omega^2\left(a^2\frac{q(b)}{q_0} - \left(b^2 + E^2\right)\right)\cos\theta\sin\theta \\
&= -\frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}\omega^2\left(a^2\cdot 1 - a^2\right)\cos\theta\sin\theta \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{3-28}
$$

となる．式（3-8）と合わせて，表面における重力の方向は $u$ 方向のみである．つまり，下図に示すように，重力の方向は，その緯度における水平面（楕円体の接平面）に直交する．

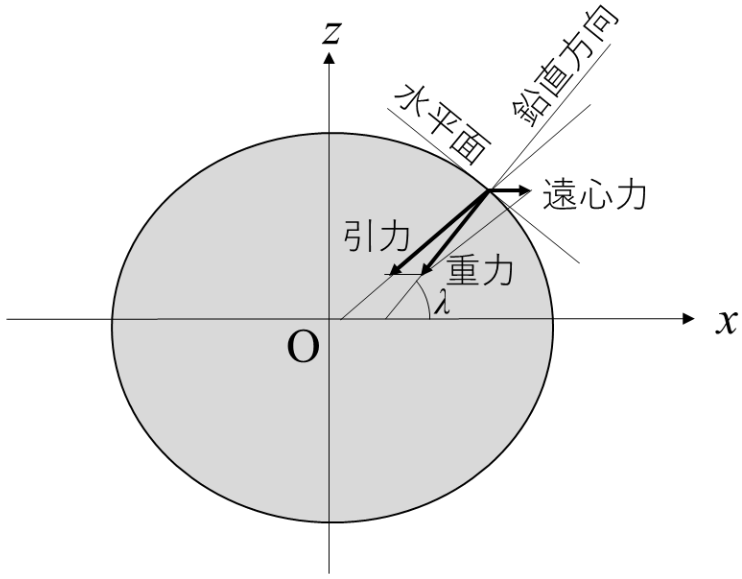


図 2 地球の重力

以下，重力加速度を記号 $g$ で表し，引力を意味する負号を省略して正数とする．式（3-18）の遠心力と引力の比を表す無次元数 $m$ に，後出の表 1 に示した地球の諸元を代入すると

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} = \frac{\left(7.292115\times10^{-5}\right)^2 \times 6378137^{\,2} \times 6356752}{3.986005\times10^{14}} \cong 0.0034 \tag{3-29}$$

となる．地球の重力において遠心力の占める割合は約 0.3% であることがわかる．

重力加速度 $g$ は，楕円体座標の角度 $\theta$ を使って表すと，式（3-25）より，

$$g(\theta) = \frac{a g_p \cos^2\theta + b g_e \sin^2\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} \tag{3-30}$$

となる．ここに，$g_e$ は地球の赤道上の重力加速度，$g_p$ は地球の極における重力加速度，$a$ は赤道半径，$b$ は極半径である．更成緯度 $\beta$ を使って表すと，更成緯度 $\beta$ と角度 $\theta$ は余角の関係（和が直角となる関係，図 1 参照）にあるから，

$$g(\beta) = \frac{a g_p \sin^2\beta + b g_e \cos^2\beta}{\sqrt{a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta}} \tag{3-31}$$

となる．測地緯度（通常の緯度）$\lambda$ を使って表すと実用的である．上式を変形して $\tan\beta$ で表すと，

$$g(\beta)=\frac{\cos^2\beta\left(ag_p\tan^2\beta+bg_e\right)}{\cos\beta\sqrt{a^2\tan^2\beta+b^2}}$$
$$=\cos\beta\cdot\frac{ag_p\tan^2\beta+bg_e}{\sqrt{a^2\tan^2\beta+b^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}\cdot\frac{ag_p\tan^2\beta+bg_e}{\sqrt{a^2\tan^2\beta+b^2}} \tag{3-32}$$

となる．ここで，更成緯度 $\beta$ と測地緯度 $\lambda$ の関係式；

$$\tan\lambda=\frac{\tan\beta}{\sqrt{1-e^2}}=\frac{a}{b}\tan\beta$$
$$\therefore \tan\beta=\frac{b}{a}\tan\lambda \tag{3-33}$$

を代入すると，

$$g(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}\tan^2\lambda}}\cdot\frac{ag_p\dfrac{b^2}{a^2}\tan^2\lambda+bg_e}{\sqrt{a^2\dfrac{b^2}{a^2}\tan^2\lambda+b^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}\tan^2\lambda}}\cdot\frac{b\left(g_p\dfrac{b}{a}\tan^2\lambda+g_e\right)}{b\sqrt{\tan^2\lambda+1}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2\tan^2\lambda}}\cdot\frac{bg_p\tan^2\lambda+ag_e}{\dfrac{1}{\cos\lambda}}$$
$$=\frac{\cos\lambda\left(bg_p\tan^2\lambda+ag_e\right)}{\sqrt{a^2+b^2\tan^2\lambda}}=\frac{\cos^2\lambda\left(bg_p\tan^2\lambda+ag_e\right)}{\cos\lambda\sqrt{a^2+b^2\tan^2\lambda}}$$
$$=\frac{bg_p\sin^2\lambda+ag_e\cos^2\lambda}{\sqrt{a^2\cos^2\lambda+b^2\sin^2\lambda}}$$

$$\therefore g(\lambda)=\frac{ag_e\cos^2\lambda+bg_p\sin^2\lambda}{\sqrt{a^2\cos^2\lambda+b^2\sin^2\lambda}} \tag{3-34}$$

となる．上式を正規重力の式と言う．ソミリアーナ（Somigliana）の式とも言う．目的の式がついに得られた．上式をさらに変形すると，

$$g(\lambda)=\frac{ag_e\left(1-\sin^2\lambda\right)+bg_p\sin^2\lambda}{\sqrt{a^2\left(1-\sin^2\lambda\right)+b^2\sin^2\lambda}}$$
$$=\frac{ag_e+\left(bg_p-ag_e\right)\sin^2\lambda}{\sqrt{a^2-\left(a^2-b^2\right)\sin^2\lambda}}$$
$$=g_e\frac{1+\left(\dfrac{bg_p}{ag_e}-1\right)\sin^2\lambda}{\sqrt{1-\dfrac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\lambda}} \tag{3-35}$$

となる．楕円の扁平さを表す変数として，扁平率（flattening）の $f$，第 1 離心率（first eccentricity）の $e$（通常の離心率 (eccentricity）のこと），第 2 離心率（second eccentricity）の $e'$ があり，それぞれ，

$$f=\frac{a-b}{a} \tag{3-36}$$

$$e=\frac{E}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \tag{3-37}$$

$$e'=\frac{E}{b}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} \tag{3-38}$$

で定義される．扁平率 $f$ と第 1 離心率 $e$ の間には，

$$e=\sqrt{f\left(2-f\right)} \tag{3-39}$$

の関係がある．式（3-35）の分子の括弧の中の係数を，

$$k=\frac{bg_p}{ag_e}-1 \tag{3-40}$$

と定義して，式（3-37）ととも式（3-35）に代入すると，

$$g(\lambda) = g_e \frac{1+k\sin^2\lambda}{\sqrt{1-e^2\sin^2\lambda}} \tag{3-41}$$

となる．地球モデルとして広く利用されている WGS-84 の式である．参考文献 4 を参照．
上式の定数 $g_e$ を $g_{WGS0}$ とし，定数 $k$ を $g_{WGS1}$ として，

$$g = g_{WGS0} \frac{1+g_{WGS1}\sin^2\lambda}{\sqrt{1-e^2\sin^2\lambda}} \tag{3-42}$$

と表すこともある．

最後に，長半径 $a$，扁平率 $f$，自転角速度 $\omega$，地球引力定数 $GM$ の 4 個を定義定数として与えた場合の正規重力の計算式をまとめておく．

$$b = a(1-f) \tag{3-36}$$

$$e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \tag{3-39}$$

$$e' = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} \tag{3-38}$$

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} \tag{3-20}$$

$$q_0 = \frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{3}{e'^2}\right)\tan^{-1}e' - \frac{3}{e'}\right) \tag{2-26}$$

$$q'_0 = 3\left(1+\frac{1}{e'^2}\right)\left(1-\frac{1}{e'}\tan^{-1}e'\right)-1 \tag{3-18}$$

$$g_e = \frac{GM}{ab}\left(1-m-\frac{m}{6}\cdot\frac{e'q'_0}{q_0}\right) \tag{3-22}$$

$$g_p = \frac{GM}{a^2}\left(1+\frac{m}{3}\cdot\frac{e'q'_0}{q_0}\right) \tag{3-23}$$

$$k = \frac{bg_p}{ag_e}-1 \tag{3-40}$$

$$g(\lambda) = g_e \frac{1+k\sin^2\lambda}{\sqrt{1-e^2\sin^2\lambda}} \tag{3-41}$$

WGS-84 楕円体の諸元を表 1 に記す．水色が定義定数であり，他は導出定数である．

表 1　WGS-84 楕円体の諸元

| | | | |
|---|---|---|---|
| 赤道半径 | Re (a) | 6378137 | m |
| 扁平率の逆数 | 1/f | 298.257223563 | none |
| 扁平率 | f | 0.003352811 | none |
| 地球の自転角速度 | ω | 7.292115E-05 | rad/s |
| | | 15.04106688 | deg/h |
| 地球引力定数 | GM | 3.986004418E+14 | m^3/s^2 |
| 極半径 | Rp (b) | 6356752.3142 | m |
| 線離心率 | E | 521854.00842339 | m |
| 第1離心率 | e | 0.081819190842622 | none |
| 第2離心率 | e' | 0.082094437949696 | none |
| m=ω^2*a^2*b/GM | | 0.00344978650684 | none |
| q0 | | 0.00007334625787 | none |
| q'0 | | 0.00268804130043 | none |
| e'q'0/q0 | | 3.00865028633565 | none |
| 赤道の重力加速度 | ge (gWGS0) | 9.7803253359 | m/s^2 |
| 極の重力加速度 | gp | 9.8321849379 | m/s^2 |
| 公式の係数 | k (gWGS1) | 0.00193185265241 | none |

この諸元から計算した正規重力を下図に示す．横軸は緯度 $\lambda$，縦軸は重力 $g$ である．

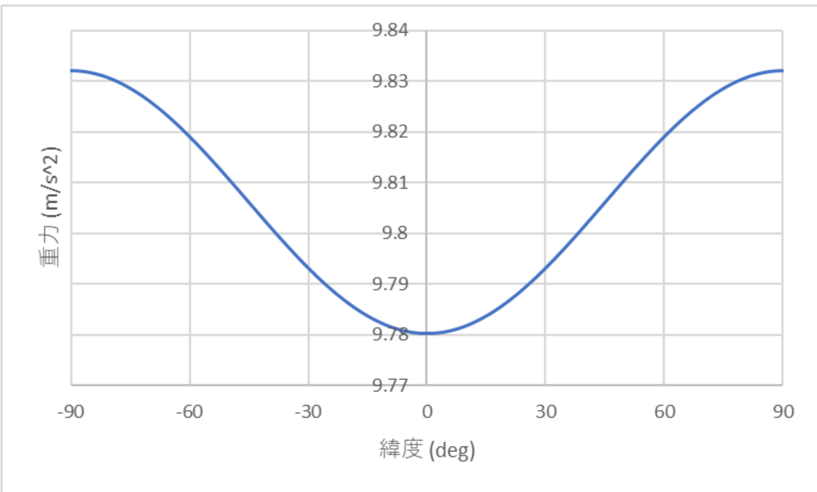


図 3　重力と緯度

参考文献


1) TB006，一般座標系のラプラス方程式

2) TB007，くわしいルジャンドル関数

3) TB008，くわしいルジャンドル陪関数

4) TB009，調和関数

5) Somigliana, C., Teoria generale del campo gravitazionale dell’ellissoide di rotazione, Mem. Soc. Astron. Ital., IV, 1929

6) National Imagery and Mapping Agency Technical Report 8350.2 (NIMA TR8350.2) Third Edition, Department of Defense World Geodetic System 1984 / Its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems, 2000

7) B. Hofmann-Wellenhof, H. Moritz, Physical Geodesy, 2nd Edition, Springer, 2006（B. ホフマン-ウェレンホフ／H. モーリッツ，西修二郎訳，物理測地学，丸善出版，2012）


参考文献 5（Somigliana の原著）の結論の一部を下図に示す.

**1º La gravità normale, o teorica, è rappresentata dal vettore gravitazionale dell’ellissoide di riferimento, considerato come superficie di livello, ed è rappresentata sulla superficie dalla formola:**

$$g_t = \frac{a\,g_e \cos^2\varphi + c\,g_n \operatorname{sen}^2\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + c^2\operatorname{sen}^2\varphi}}.$$