

4.3 地球の重力

4.3.1 引力

地球上の物体に働く重力 (gravity) は, その物体と地球との間に働く引力 (gravitation) と, 地球の自転による遠心力の合力であり, 前者の引力がそのほとんどを占めている. 二つの質点の質量を M, m とし, 質点間の距離を s とすると, その質点間に働く引力 F は, 万有引力定数 G を使って,

$$F = -G \frac{Mm}{s^2} \quad (4.40)$$

と表される. 引力は, 両質点の質量 M, m の積に比例し, 距離 s の二乗に反比例する. 右辺の符号は斥力を正, 引力を負と定義している. 万有引力定数の記号は G の他に k や k^2 が使われることもある. 万有引力定数 G は, 有効数字 4 桁まで記すと, およそ,

$$G = 6.673 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \quad (4.41)$$

である. 単位は Nm^2/kg^2 と表される. 有効数字の 4 桁目以下は, 長年にわたって少しずつ見直されている. 万有引力定数 G は, 質量との積 GM の形で現れることが多い. そこで, 積 GM を引力定数 (または重力定数) と言い, 記号 μ で表すこともある. 引力定数 $\mu = GM$ の単位は m^3/s^2 である.

質量 m の単位質量あたりの引力, すなわち引力加速度を距離 s で積分すると,

$$U = -\int \frac{GM}{s^2} ds = \frac{GM}{s} \quad (4.42)$$

となる. この関数 U を引力の位置エネルギーと言う. 以下, 単に位置エネルギーと記す. この位置エネルギーを質点 M からの距離 s で微分して勾配 (gradient) を求めると,

$$\frac{dU}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{GM}{s} \right) = -\frac{GM}{s^2} \quad (4.43)$$

となり, 質点 m に働く引力加速度となる. 質点の集合 (質点系や剛体) との引力加速度を求めようとする場合, 質点ごとの引力加速度をベクトルとして求め, それらのベクトル和からその場の引力加速度を求めるのが直接的である. しかし, 位置エネルギーの総和を求

めてから、それを微分して引力加速度を求める手順をとることが多い。いったん積分してからまた微分することになり回り道のようなのだが、以下の例に示すように、むしろ計算が容易になることが多い。

図 4.10 に示すように、質点 M の位置を $\boldsymbol{\rho}$ 、その質点による位置エネルギーを U 、任意の位置を \mathbf{r} とすると、式 (4.42) より、

$$U = G \frac{M}{s} = G \frac{M}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|} \quad (4.44)$$

となる。ここに、記号 $|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|$ は位置 \mathbf{r} と質点 $\boldsymbol{\rho}$ との距離を示す。

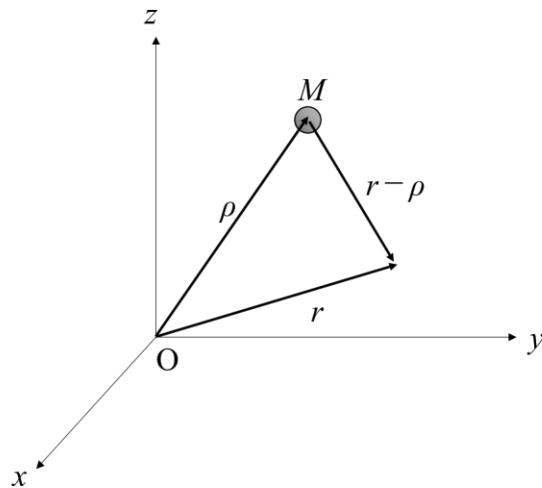


図 4.10 質点の引力

4.3.2 円板の引力

簡単な剛体の例として、図 4.11 に示す薄い円板を考える。円板の半径を R 、厚さを t 、密度を σ とする。円板が、 x 軸上の位置 \mathbf{r} におよぼす引力加速度を求める。

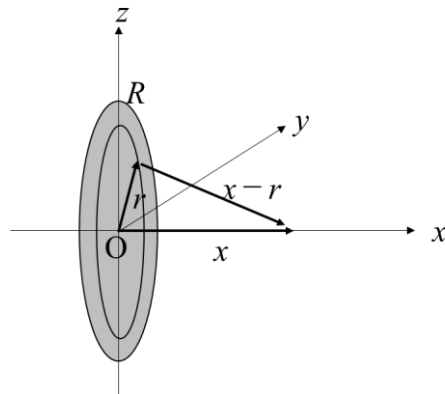


図 4.11 円板の引力

円板を同心円に分割して、半径 r と半径 $r + dr$ に挟まれた薄い円環 (ring) を考える。位置エネルギーの式 (4.44) において、円環の質量 dM は、

$$dM = \sigma t \cdot 2\pi r \cdot dr \quad (4.45)$$

であり、距離 s は三平方の定理より、

$$s = \sqrt{x^2 + r^2} \quad (4.46)$$

となる。これらの式を式 (4.44) に代入すると、

$$dU = G \frac{\sigma t \cdot 2\pi r \cdot dr}{\sqrt{x^2 + r^2}} = 2\pi G \sigma t \frac{r dr}{\sqrt{x^2 + r^2}} \quad (4.47)$$

となる。円板全体では、円板の中心の $r=0$ から円板の半径の $r=R$ まで積分して、

$$\begin{aligned} U &= \int_0^R 2\pi G \sigma t \frac{r}{\sqrt{x^2 + r^2}} dr \\ &= 2\pi G \sigma t \left[\sqrt{x^2 + r^2} \right]_0^R = 2\pi G \sigma t \left(\sqrt{x^2 + R^2} - x \right) \end{aligned} \quad (4.48)$$

となる。無限遠の位置 $x = \infty$ において、位置エネルギーは 0 となる。

円板による引力加速度は、位置エネルギーの勾配であるから、

$$\left. \begin{aligned} f_x &= \frac{dU}{dx} = 2\pi G\sigma t \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} - 1 \right) \\ f_y &= f_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.49)$$

となる。ここで、円板からの距離 x を一定に保って、円板の半径 R を変化させてみる。半径 R が 0、すなわち円板が存在しないとき、括弧の中が 0 となり、当然ながら引力加速度 f_x は 0 となる。半径 R が無限大の円板では、括弧の中が -1 となって、

$$\left. \begin{aligned} f_x &= -2\pi G\sigma t \\ f_y &= f_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.50)$$

となる。半径 R が距離 x の 10 倍 ($R=10x$) の円板では括弧の中が約 -0.9 となり、無限大の円板の引力加速度との差は約 10%に過ぎないことがわかる。この無限円板の引力加速度の式は、後で陸地の山岳部における重力を求めるのに利用される。

4.3.3 球殻の引力

半径 R の中空の薄い球殻 (shell) を図 4.12 に示す。球殻の厚さを t 、密度を σ とする。位置 \mathbf{r} に球殻がおよぼす引力加速度を求める。位置 \mathbf{r} は x 軸上にあつて、座標 $(x, 0, 0)$ で表されるものとする。

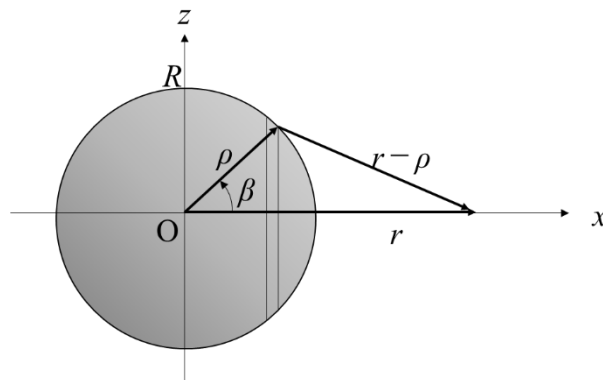


図 4.12 球殻の引力

原点から球殻上の点 \mathbf{p} を結ぶ半径が x 軸となす角度を β とする。原点を頂点とする頂角 β の円錐面と頂角 $\beta + d\beta$ の円錐面とで挟まれる薄い円環 (ring) を考える。位置エネルギーの式 (4.44) において、円環の質量 dM は、

$$\begin{aligned} dM &= \sigma t \cdot 2\pi R \sin \beta \cdot R d\beta \\ &= 2\pi\sigma t R^2 \sin \beta d\beta \end{aligned} \quad (4.51)$$

となる。距離 s は三角関数の余弦定理より、

$$s = \sqrt{x^2 + R^2 - 2xR \cos \beta} \quad (4.52)$$

である。この式の両辺を微分すると、

$$\begin{aligned} ds &= \frac{2xR \sin \beta d\beta}{2\sqrt{x^2 + R^2 - 2xR \cos \beta}} = \frac{xR \sin \beta d\beta}{s} \\ \therefore \frac{1}{s} &= \frac{ds}{xR \sin \beta d\beta} \end{aligned} \quad (4.53)$$

となる。これらの式を式 (4.44) に代入すると、

$$dU = G \frac{dM}{s} = G \frac{2\pi\sigma t R^2 \sin \beta d\beta ds}{xR \sin \beta d\beta} = G\sigma t \frac{2\pi R ds}{x} \quad (4.54)$$

となり、角度 β の項が消えて、距離の微分 ds が残る。

点 \mathbf{r} が球殻の外側にある場合、球殻全体による位置エネルギーは、点 \mathbf{r} と球殻の右端との距離 $s = x - R$ から、点 \mathbf{r} と球殻の左端との距離 $s = x + R$ まで積分して、

$$\begin{aligned} U &= \int_{x-R}^{x+R} G\sigma t \frac{2\pi R}{x} ds = G\sigma t \frac{2\pi R}{x} \int_{x-R}^{x+R} ds \\ &= G\sigma t \frac{2\pi R}{x} ((x+R) - (x-R)) = G\sigma t \frac{4\pi R^2}{x} \end{aligned} \quad (4.55)$$

となる。球殻の全質量 M は、

$$M = \sigma t \cdot 4\pi R^2 \quad (4.56)$$

であるから、

$$U = \frac{GM}{x} \quad (4.57)$$

となり，簡単な式となる．

位置 \mathbf{r} が球殻の内側にある場合は，位置 \mathbf{r} と球殻の右端との距離 $s = R - x$ から，位置 \mathbf{r} と球殻の左端との距離 $s = R + x$ まで積分すると，

$$\begin{aligned} U &= G\sigma t \frac{2\pi R}{x} \int_{R-x}^{R+x} ds = G\sigma t \frac{2\pi R}{x} ((R+x) - (R-x)) \\ &= G\sigma t \frac{2\pi R}{x} \cdot 2x = G\sigma t \cdot 4\pi R = G \frac{\sigma t \cdot 4\pi R^2}{R} = \frac{GM}{R} \end{aligned} \quad (4.58)$$

となり，球殻の内側では一定となる．

図 4.12 では，位置 \mathbf{r} は x 軸上にあるものとしたが，位置エネルギーは原点を中心として，すべての方向に一様であるから，任意の位置 \mathbf{r} に対して，

$$U = \frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > R \quad (4.59)$$

$$U = \frac{GM}{R}, \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < R \quad (4.60)$$

と表すことができる．位置エネルギーは距離 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ で決まり，球殻から遠ざかるにつれて位置エネルギーは減少し，無限遠で 0 となる．球殻の外側の位置エネルギーの式 (4.59) は球殻の表面では $U = GM/R$ となり，球殻の内側の位置エネルギーの式 (4.60) と一致する．すなわち，球殻の内側と外側で位置エネルギーは連続している．

引力加速度 \mathbf{f} は，位置エネルギーの勾配である．球殻の外側における引力加速度 \mathbf{f} は，式 (4.59) を位置の座標 x, y, z で微分すると，

$$\left. \begin{aligned} f_x &= -GM \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1.5}} \\ f_y &= -GM \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1.5}} \\ f_z &= -GM \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1.5}} \end{aligned} \right\} \quad (4.61)$$

となる。引力加速度の向きは、球の中心に向かっている。引力加速度 \mathbf{f} の大きさは、

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}| &= \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} \\ &= \sqrt{\frac{G^2 M^2 x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} + \frac{G^2 M^2 y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} + \frac{G^2 M^2 z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \\ &= \frac{GM}{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned} \quad (4.62)$$

となり、原点に位置する質量 M の質点による引力加速度に等しい。

球殻の内側では、位置エネルギーの式 (4.60) を位置の座標 x, y, z で微分して、

$$f_x = f_y = f_z = 0 \quad (4.63)$$

となる。球殻の円環要素による引力が、球殻全体では打ち消しあって 0 となる。球殻の内側と外側で引力加速度は不連続である。

4.3.4 球の引力

前節では中空な球殻の引力を求めた。その結果を利用して、本節では中実な球 (solid sphere) の引力を求める。球の内部の密度 σ は一様とする。

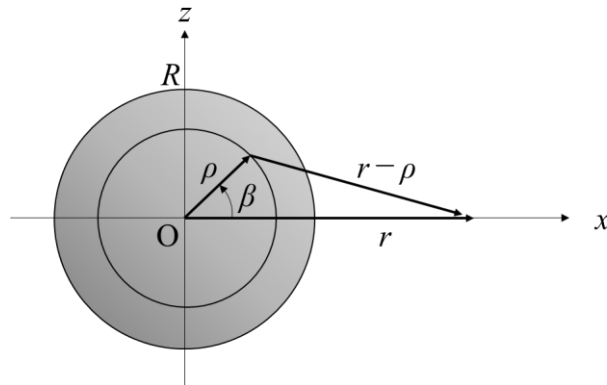


図 4.13 球の引力

図 4.13 に示すように球を同心球で分割して、半径 ρ と半径 $\rho + d\rho$ に挟まれた薄い球殻 (shell) を考える。位置 \mathbf{r} が球の外側にある場合、球の位置エネルギーは、球殻の位置エネルギーの式 (4.54) を球の中心の $\rho=0$ から、球の表面の $\rho=R$ まで積分して、

$$\begin{aligned} U &= \int_{\rho=0}^{\rho=R} dU = \int_0^R G\sigma \frac{4\pi\rho^2}{x} d\rho \\ &= \frac{G\sigma}{x} \int_0^R 4\pi\rho^2 d\rho = \frac{G\sigma}{x} \frac{4\pi R^3}{3} \end{aligned} \quad (4.64)$$

となる。球の質量 M は、

$$M = \sigma \frac{4\pi R^3}{3} \quad (4.65)$$

であるから、

$$U = \frac{GM}{x} \quad (4.66)$$

となり、簡単な式になる。

位置 \mathbf{r} が球の内側にある場合、位置 \mathbf{r} よりも内側の中実の球による位置エネルギー U_1 と、位置 \mathbf{r} よりも外側の中実の球による位置エネルギー U_2 に二分して考える。内側の中実の球による位置エネルギー U_1 は、式 (4.57) の半径 R を ρ に、厚さ t を $d\rho$ に置き換えて、球の中心の $\rho=0$ から位置 \mathbf{r} がある $\rho=x$ まで積分すると、

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \int_{\rho=0}^{\rho=x} dU = \int_0^x G\sigma \frac{4\pi\rho^2}{x} d\rho = G\sigma \frac{4\pi}{x} \int_0^x \rho^2 d\rho \\
 &= G\sigma \frac{4\pi}{x} \cdot \frac{x^3}{3} = G\sigma \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \frac{x^3}{R^3} = GM \frac{x^2}{R^3}
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

となる。外側の中空の球による位置エネルギー U_2 は、式 (4.58) の半径 R を ρ に、厚さ t を $d\rho$ に置き換えて、位置 \mathbf{r} がある $\rho=x$ から球の半径の $\rho=R$ まで積分すると、

$$\begin{aligned}
 U_2 &= \int_{\rho=x}^{\rho=R} dU = \int_x^R G\sigma \cdot 4\pi\rho d\rho = 4\pi G\sigma \int_x^R \rho d\rho \\
 &= 4\pi G\sigma \frac{R^2 - x^2}{2} = G\sigma \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \frac{3}{R^3} \cdot \frac{R^2 - x^2}{2} \\
 &= GM \left(\frac{3}{2R} - \frac{3x^2}{2R^3} \right)
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

となる。よって、球全体による位置エネルギー U は両者を合わせて、

$$\begin{aligned}
 U &= U_1 + U_2 = GM \frac{x^2}{R^3} + GM \left(\frac{3}{2R} - \frac{3x^2}{2R^3} \right) \\
 &= -GM \frac{x^2}{2R^3} + GM \frac{3}{2R}
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

となる。

図 4.13 では、位置 \mathbf{r} は x 軸上にあるものとしたが、位置エネルギーは、原点を中心として、すべての方向に一様であるから、任意の位置 \mathbf{r} に対して、

$$U = \frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > R \tag{4.70}$$

$$U = -GM \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2R^3} + GM \frac{3}{2R}, \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < R \tag{4.71}$$

と表される。球の外側、内側のいずれにおいても、位置エネルギーは球殻の中心からの距離 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ で決まる。球の表面の $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$ において、球の外側と内側の位

位置エネルギーはともに $U = GM/R$ となる。すなわち、球の表面の内側と外側で位置エネルギーは連続している。

球の外側における引力加速度は、位置エネルギーの式 (4.70) を座標 x, y, z で微分して、

$$\left. \begin{aligned} f_x &= -GM \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1.5}} \\ f_y &= -GM \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1.5}} \\ f_z &= -GM \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1.5}} \end{aligned} \right\} \quad (4.72)$$

となる。引力加速度の向きは、球の中心に向かっている。引力加速度 \mathbf{f} の大きさは、

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}| &= \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} \\ &= \sqrt{\frac{G^2 M^2 x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} + \frac{G^2 M^2 y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} + \frac{G^2 M^2 z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \\ &= \frac{GM}{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned} \quad (4.73)$$

となり、原点に位置する質量 M の質点による引力加速度に等しい。

球の内側における引力加速度は、位置エネルギーの式 (4.71) を座標 x, y, z で微分して、

$$\left. \begin{aligned} f_x &= -GM \frac{x}{R^3} \\ f_y &= -GM \frac{y}{R^3} \\ f_z &= -GM \frac{z}{R^3} \end{aligned} \right\} \quad (4.74)$$

となる。引力加速度の向きは、球の中心に向かっている。引力加速度 \mathbf{f} の大きさは、

$$\begin{aligned}
|\mathbf{f}| &= \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} \\
&= \sqrt{\frac{G^2 M^2 x^2}{R^6} + \frac{G^2 M^2 y^2}{R^6} + \frac{G^2 M^2 z^2}{R^6}} \\
&= \frac{GM}{R^3} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}
\end{aligned} \tag{4.75}$$

となる。球の表面の $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$ において、球の外側と内側の引力加速度はともに

$|\mathbf{f}| = GM/R^2$ となり、球の表面の内側と外側で引力加速度は連続している。

前節の球殻や本節の球の場合、引力の方向は物体の中心に向かうが、これはむしろ特別な場合である。多くの場合、引力の方向と物体の中心に向かう方向とは異なる。その例を問題 4.5 に示す。

4.3.5 球の重力

一定の回転角速度 ω で回転する球上の重力は、前節の球の引力に、球の回転による遠心力を加えたものである。前節の図 4.13 において、 z 軸を回転軸とし、 x 軸と y 軸は球に固定されていて球とともに回転するものとする。位置 $\mathbf{r}(x, 0, z)$ の質点 m に働く遠心力は、回転軸からの距離が x であるから、

$$F = m\omega^2 x \tag{4.76}$$

と表される。単位質量あたりの遠心力、すなわち遠心力の加速度は、

$$f = \omega^2 x \tag{4.77}$$

となる。遠心力の位置エネルギー U_c は、位置の座標 x で積分して、

$$U_c = \int \omega^2 x dx = \frac{1}{2} \omega^2 x^2 \tag{4.78}$$

となる。図 4.13 では、位置 \mathbf{r} は xz 平面上にあるものとしたが、遠心力の位置エネルギーは回転軸の z 軸に対して対称であるから、任意の位置 $\mathbf{r}(x, y, z)$ に対して、

$$U_c = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) \quad (4.79)$$

と表すことができる。式 (4.70) と式 (4.71) の引力の位置エネルギー U と、式 (4.79) の遠心力の位置エネルギー U_c の和が、重力の位置エネルギー $V = U + U_c$ であるから、

$$V = \frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2), \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > R \quad (4.80)$$

$$V = -GM \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2R^3} + GM \frac{3}{2R} + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2), \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < R \quad (4.81)$$

となる。

球の表面の $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$ における重力の位置エネルギーは、

$$V = \frac{GM}{R} + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) = \frac{GM}{R} + \frac{1}{2}\omega^2(R^2 - z^2) \quad (4.82)$$

となる。球の赤道の $z=0$ では最大値の $\frac{GM}{R} + \frac{1}{2}\omega^2 R^2$ となり、球の極の $z=\pm R$ では最小値

の $\frac{GM}{R}$ となる。回転する球の場合、球の位置エネルギーが球の表面上で一定とはならない。

(表面が等ポテンシャル面ではない。)

球の外側における位置エネルギーの式 (4.80) について、球座標系 (r, θ, φ) を使って表す

と、 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$ 、 $\sqrt{x^2 + y^2} = r \sin \theta$ であるから、

$$V = \frac{GM}{r} + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (4.83)$$

となり、式の形が簡単になる、

4.3.6 楕円体の重力

回転する球の位置エネルギーを表すには球座標系 (r, θ, φ) が便利であったのと同様に、

回転する楕円体の位置エネルギーを表すには楕円体座標系 (u, θ, φ) が便利である。楕円体座標系において、引力の位置エネルギー U と遠心力の位置エネルギー U_c の和、すなわち重力の位置エネルギー $V = U + U_c$ を、焦点距離 E 、短半径 b の楕円体の表面上で一定とする条件のもとで求めると、

$$\left. \begin{aligned} V(u, \theta) &= \frac{GM}{E} \tan^{-1} \frac{E}{u} + \frac{1}{2} \omega^2 a^2 \frac{q(u)}{q_0} \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + E^2) \sin^2 \theta \\ q(u) &= \frac{1}{2} \left(\left(1 + 3 \frac{u^2}{E^2} \right) \tan^{-1} \frac{E}{u} - 3 \frac{u}{E} \right) \\ q_0 &= \frac{1}{2} \left(\left(1 + 3 \frac{b^2}{E^2} \right) \tan^{-1} \frac{E}{b} - 3 \frac{b}{E} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.84)$$

となる。ここに、 E は楕円体の断面の楕円の焦点距離であり、 a は長半径、 b は短半径である。位置エネルギー V は、回転軸の z 軸まわりに軸対称だから、角度 φ は式の中に現れない。重力加速度 f と位置エネルギー V の関係を導くと、

$$\left. \begin{aligned} f_u(u, \theta) &= \sqrt{\frac{u^2 + E^2}{u^2 + E^2 \cos^2 \theta}} \cdot \frac{\partial V(u, \theta)}{\partial u} \\ f_\theta(u, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{u^2 + E^2 \cos^2 \theta}} \cdot \frac{\partial V(u, \theta)}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (4.85)$$

となる。ここに、 f_u は楕円の法線方向の重力加速度であり、 f_θ は楕円の接線方向の重力加速度である。

式 (4.84) と式 (4.85) の導出には非常に長い計算が必要であり、本書の範囲を超えるので、文献 3~5 を参照されたい。本書では、位置の座標 $u = b$ 、すなわち楕円体の表面において、位置エネルギーが、角度 θ によらず一定となること（表面が等ポテンシャル面となること）を確認するとどめる。式 (4.84) に $u = b$ を代入してみると、 $q(b) = q_0$ であるから、

$$\begin{aligned}
 V(b, \theta) &= \frac{GM}{E} \tan^{-1} \frac{E}{b} + \frac{1}{2} \omega^2 a^2 \frac{q_0}{q_0} \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 (b^2 + E^2) \sin^2 \theta \\
 &= \frac{GM}{E} \tan^{-1} \frac{E}{b} + \frac{1}{2} \omega^2 a^2 \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 a^2 \sin^2 \theta \\
 &= \frac{GM}{E} \tan^{-1} \frac{E}{b} + \frac{1}{2} \omega^2 a^2 \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} + \sin^2 \theta \right) \\
 &= \frac{GM}{E} \tan^{-1} \frac{E}{b} + \frac{1}{3} \omega^2 a^2
 \end{aligned}$$

となり，角度 θ の項が消える．すなわち，楕円体の表面では，位置エネルギー V が一定となっている．

式 (4.85) に式 (4.84) を代入して，法線方向の重力加速度 f_u を計算すると，

$$f_u(b, \theta) = \frac{af_b \cos^2 \theta + bf_a \sin^2 \theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} \quad (4.86)$$

$$f_a = -\frac{GM}{ab} \left(1 - m - \frac{me'}{6} \cdot \frac{q'_0}{q_0} \right)$$

$$f_b = -\frac{GM}{a^2} \left(1 + \frac{me'}{3} \cdot \frac{q'_0}{q_0} \right)$$

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}$$

$$q_0 = \frac{1}{2} \left(\left(1 + \frac{3}{e^2} \right) \tan^{-1} e' - \frac{3}{e'} \right) \quad (4.87)$$

$$q'_0 = 3 \left(1 + \frac{1}{e^2} \right) \left(1 - \frac{1}{e'} \tan^{-1} e' \right) - 1$$

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

$$e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

となる．ここに， f_a は $\beta = 0^\circ$ ，すなわち楕円体の赤道における重力， f_b は $\beta = \pm 90^\circ$ ，すなわち楕円体の極における重力である．記号 m は遠心力と引力の大きさの比を表す無次元数である．記号 e' は第 2 離心率と言う．通常の離心率 e は， e' と区別するため，第 1 離心率とも言う．

楕円体の接線方向の重力加速度 f_θ は，

$$f_\theta(b, \theta) = 0 \quad (4.88)$$

となる。したがって、重力加速度の方向、すなわちその位置における鉛直方向と、地球表面の法線方向とが一致する。式 (4.84) と式 (4.85) を使って式 (4.86) ～式 (4.88) を導出する過程もかなり長くなるので付録とする。

4.3.7 地球の重力

本節以降の重力加速度 g は、引力を意味する負号を省略して正数とする。地球の重力は、回転する楕円体の重力がモデルとなっている。式 (4.87) の遠心力と引力の比を表す無次元数 m に、表 4.1 に示した地球の諸元を代入すると、

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} = \frac{(7.292115 \times 10^{-5})^2 \times 6378137^2 \times 6356752}{3.986005 \times 10^{14}} \cong 0.0034$$

となる。地球の重力において遠心力の占める割合は約0.3% である。地球の重力加速度 g は、楕円体座標の角度 θ を使って表すと、式 (4.86) より、

$$g(\theta) = \frac{ag_p \cos^2 \theta + bg_e \sin^2 \theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} \quad (4.89)$$

となる。ここに、 g_e は地球の赤道 (equator) 上の重力加速度、 g_p は地球の極 (pole) における重力加速度、 a は赤道半径、 b は極半径である。更成緯度 β を使って表すと、更成緯度 β と角度 θ は余角の関係 (和が直角となる関係) にあるから、

$$g(\beta) = \frac{ag_p \sin^2 \beta + bg_e \cos^2 \beta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}} \quad (4.90)$$

となる。測地緯度 λ を使って表すと、実用的である。式 (4.90) を変形すると、

$$\begin{aligned} g(\beta) &= \frac{\cos^2 \beta (ag_p \tan^2 \beta + bg_e)}{\cos \beta \sqrt{a^2 \tan^2 \beta + b^2}} = \cos \beta \cdot \frac{ag_p \tan^2 \beta + bg_e}{\sqrt{a^2 \tan^2 \beta + b^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} \cdot \frac{ag_p \tan^2 \beta + bg_e}{\sqrt{a^2 \tan^2 \beta + b^2}} \end{aligned}$$

となる。この式に式 (4.26) より、

$$\tan \lambda = \frac{\tan \beta}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{a}{b} \tan \beta$$

$$\therefore \tan \beta = \frac{b}{a} \tan \lambda$$

を代入すると,

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\tan^2\lambda}} \cdot \frac{ag_p \frac{b^2}{a^2}\tan^2\lambda + bg_e}{\sqrt{a^2\frac{b^2}{a^2}\tan^2\lambda + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\tan^2\lambda}} \cdot \frac{b\left(g_p \frac{b}{a}\tan^2\lambda + g_e\right)}{b\sqrt{\tan^2\lambda + 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \lambda}} \cdot \frac{bg_p \tan^2 \lambda + ag_e}{\cos \lambda} = \frac{\cos \lambda (bg_p \tan^2 \lambda + ag_e)}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \lambda}} \\ &= \frac{\cos^2 \lambda (bg_p \tan^2 \lambda + ag_e)}{\cos \lambda \sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \lambda}} = \frac{bg_p \sin^2 \lambda + ag_e \cos^2 \lambda}{\sqrt{a^2 \cos^2 \lambda + b^2 \sin^2 \lambda}} \\ \therefore g(\lambda) &= \frac{ag_e \cos^2 \lambda + bg_p \sin^2 \lambda}{\sqrt{a^2 \cos^2 \lambda + b^2 \sin^2 \lambda}} \end{aligned} \quad (4.91)$$

となる。この式を正規重力 (normal gravity) の式と言う。ソミリアーナの式とも言う。カルロ・ソミリアーナ (Carlo Somigliana) はイタリアの数学者 (1860 – 1955) である。式 (4.91) をさらに変形すると,

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \frac{ag_e(1 - \sin^2 \lambda) + bg_p \sin^2 \lambda}{\sqrt{a^2(1 - \sin^2 \lambda) + b^2 \sin^2 \lambda}} \\ &= \frac{ag_e + (bg_p - ag_e) \sin^2 \lambda}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \lambda}} = g_e \frac{1 + \left(\frac{bg_p}{ag_e} - 1\right) \sin^2 \lambda}{\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \lambda}} \\ &= \frac{ag_e + (bg_p - ag_e) \sin^2 \lambda}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \lambda}} = g_e \frac{1 + \left(\frac{bg_p}{ag_e} - 1\right) \sin^2 \lambda}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \lambda}} \end{aligned}$$

となる。ここに、分母の e は、楕円の離心率である。ここで、分子の括弧の中の係数を、

$$\gamma = \frac{bg_p}{ag_e} - 1 \quad (4.92)$$

と新たに定義すると、式 (4.91) は、

$$g(\lambda) = g_e \frac{1 + \gamma \sin^2 \lambda}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \lambda}} \quad (4.93)$$

となり、さらに簡単な式となる。WGS-84 では、この式の定数 g_e を g_{WGS0} とし、定数 γ を g_{WGS1} として、

$$g = g_{WGS0} \frac{1 + g_{WGS1} \sin^2 \lambda}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \lambda}} \quad (4.94)$$

と表している。定数 g_{WGS0} と g_{WGS1} の値を表 4.1 に記す。

Example

式 (4.94) を使うと、緯度 $\lambda = 0^\circ$ の赤道上の重力は $g_e \doteq 9.780 \text{ m/s}^2$ となり、緯度 $\lambda = \pm 90^\circ$ の極における重力は $g_p \doteq 9.832 \text{ m/s}^2$ となり、北緯 45° と南緯 45° における重力は $g_{45^\circ} \doteq 9.806 \text{ m/s}^2$ となる。地球の重力と緯度の関係を図 4.14 に示す、

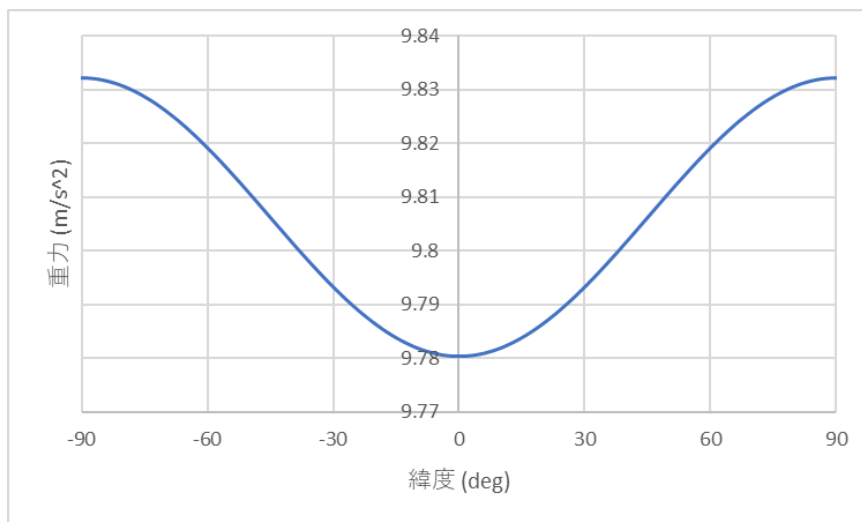


図 4.14 重力と緯度

国内および海外の各地の重力実測値は理科年表（文献 2）に掲載されている。また、国土地理院のウェブサイトでも国内各地の緯度・経度・高度を入力して調べることができる。

地上の物体に働く重力の模式図を図 4.15 に示す。

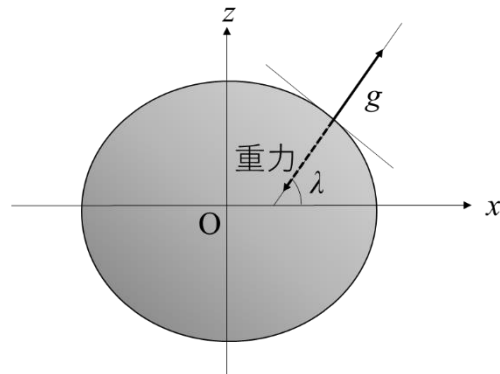


図 4.15 地球の重力

重力の向きは鉛直下方であるが，加速度センサで重力を計測するときの出力の向きを考える。地上に静止している物体は，図の破線に示すように重力によって鉛直下方に押し付けられる。この力は，重力のない空間で逆向きの鉛直上方に等加速度運動するときを検知される力と等価である。（ロケットで鉛直上方に打ち上げられる際に，乗員の人体は鉛直下方に押し付けられることを想起されたい。）

したがって，緯度 λ の位置において，地球の重力 g を加速度センサで計測すると図 4.15 の実線に示すベクトルのようになり，航法座標系における見かけの重力加速度 \mathbf{g}^n は，

$$\mathbf{g}^n = \begin{bmatrix} g_N \\ g_E \\ g_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

となり，鉛直上方向きである。もし ECEF 座標系で重力加速度を表そうとすると，式 (4.72) のような 3 要素の式となるが，航法座標系を使うとこのように簡単な式となる。

Column

航法座標系として north – west – up (NWU) 座標系を使う場合には， $\mathbf{g}^n = \begin{bmatrix} g_N \\ g_W \\ g_U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}$ となり，符号が異なってくる。

4.3.8 重力と高度

地球の平均密度を求めてみる．万有引力定数を $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kgs}^2$ とし，引力定数 GM として表 4.1 の値を用いると，地球の質量 M は，

$$M = \frac{GM}{G} = \frac{3.986005 \times 10^{14}}{6.673 \times 10^{-11}} = 5.973 \times 10^{24} \text{ kg}$$

となる．地球の体積 V は，平均半径 R に式 (4.5) の値を使うと，

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi \times 6371000^3}{3} = 1.083 \times 10^{21} \text{ m}^3$$

となる．したがって，平均密度 ρ は，

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{5.973 \times 10^{24}}{1.083 \times 10^{21}} = 5.51 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

となる．水の密度の $1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ よりは大きく，鉄の密度の $7.86 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ よりは小さい．地球の地表付近の岩石の密度 ρ_s と，海水の密度 ρ_w は，およそ，

$$\left. \begin{aligned} \rho_s &\cong 2.67 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ \rho_w &\cong 1.03 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \end{aligned} \right\} \quad (4.96)$$

と言われている．

地球表面の外側において，地球の中心からの距離 x における重力は，球の引力の式 (4.73) を使うと，

$$g(x) = \frac{GM}{x^2} \quad (4.97)$$

である．距離 x は地球の半径 R と高度 h の和であるから，高度 h を変数として， $x = R + h$ を代入すると，

$$\begin{aligned}
g(h) &= \frac{GM}{(R+h)^2} \\
\therefore g(0) &= \frac{GM}{R^2} \\
\therefore g(h) &= \frac{R^2 g(0)}{(R+h)^2} = \frac{g(0)}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}
\end{aligned}
\tag{4.98}$$

となる。高度が増加すれば、重力加速度は減少する。低高度であれば、 $h/R \ll 1$ であるから、

$$g(h) \cong \left(1 - \frac{2h}{R}\right) g(0) = g(0) - \frac{2g(0)}{R} h \tag{4.99}$$

と近似できる。この式を使って、海面上の上空、高度 h における重力加速度を計算できる。高度 0 m の重力加速度 $g(0)$ には式 (4.94) を使う。

Example

式 (4.99) の第 2 項の高度 h の係数は、例えば $g(0)$ を緯度 $\pm 45^\circ$ における $g_{45^\circ} \doteq 9.806 \text{ m/s}^2$ とし、半径 R を式 (4.5) の平均半径とすると、

$$-\frac{2g(0)}{R} = -\frac{2 \times 9.806}{6.371 \times 10^6} = -3.078 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2 \text{m}}$$

となる。地球物理学では楕円体の影響も考慮に加えて $-3.086 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2 \text{m}$ という値が使われることが多い。

高度 h の陸地の表面における重力加速度は、式 (4.99) の重力加速度に、陸地の岩石の引力による重力加速度の増加分を加えて、

$$g(h) = g(0) - \frac{2g(0)}{R} h + 2\pi G \rho_s h \tag{4.100}$$

となる。第 3 項には、無限円板の引力加速度の式 (4.50) を使っている。

Example

式 (4.101) の第 3 項の高度 h の係数は、式 (4.41) の万有引力定数と式 (4.96) の岩石の密度を用いると、

$$2\pi G\rho_s = 2\pi \times 6.673 \times 10^{-11} \times 2670 = 1.119 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2 \text{m}}$$

となる。

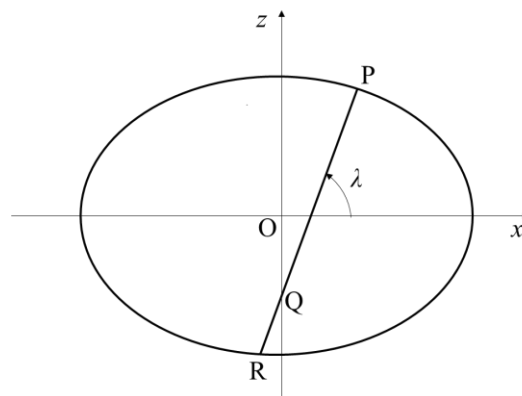
問題

問題 4.1 楕円の定義の式 (4.6) を使って楕円の方程式 (4.14) を証明せよ。

問題 4.2 焦点からの距離の式 (4.15) を証明せよ。

問題 4.3 式 (4.29) を使って媒介変数を使った曲率半径の式 (4.30) を証明せよ。

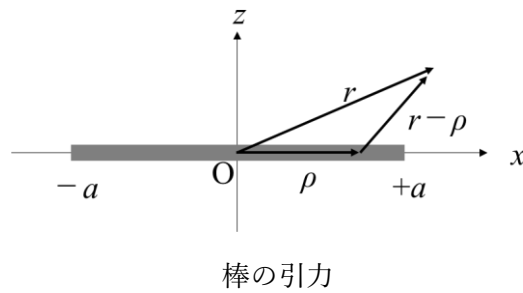
問題 4.4 楕円体を卯酉線で切った断面は楕円である。その楕円の短軸と長軸の長さを求めて卯酉線の曲率半径を計算し、式 (4.34) と一致することを証明せよ。図は地理緯度 λ の点 P を通る法線である。法線上の線分 PR は、点 P の卯酉面（紙面に直角）と子午面（紙面）との交線である。一般に、線分 PR と z 軸との交点 Q は地心 O に一致しない。



卯酉線の曲率半径

ヒント) 卯酉線の楕円の短半径は線分 PR の 1/2 に等しいこと、長半径は線分 PR の中点における y 座標（紙面に直角）の値に等しいことを利用する。楕円体の式は地理緯度 λ を用いた式 (4.28) を利用する。

問題 4.5 図に示すような長さ $2a$, 断面積 A , 密度 σ の棒による引力を求めよ.



参考文献

- 1) 坪井忠二, 重力 改訂増補, 岩波書店, 1944
- 2) 東京天文台編, 理科年表 平成 29 年 第 90 冊, 丸善出版, 2016
- 3) Somigliana, C., Teoria generale del campo gravitazionale dell'ellissoide di rotazione, Mem. Soc. Astron. Ital., IV, 1929
- 4) National Imagery and Mapping Agency Technical Report 8350.2 (NIMA TR8350.2) Third Edition, Department of Defense World Geodetic System 1984 / Its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems, 2000
- 5) B. Hofmann-Wellenhof, H. Moritz, Physical Geodesy, 2nd Edition, Springer, 2006 (B.ホフマン-ウェレンホフ/H.モーリッツ, 西修二郎訳, 物理測地学, 丸善出版, 2012)
- 6) R. M. Rogers, Applied Mathematics in Integrated Navigation Systems, 3rd Edition, AIAA, 2007
- 7) D. H. Titterton, Strapdown Inertial Navigation Technology, 2nd Edition, AIAA, 2004