

4 地球モデル

慣性航法には地球の重力加速度と自転角速度の知識が必要となる。本章では、地球の形、自転角速度、重力について記す。

4.1 地球の形

4.1.1 楕円と楕円体

図 4.1 の左側に示すように、直径 $2r$ の円 (circle) を、直径を回転軸として 1 回転させた回転体は直径 $2r$ の球 (sphere) である。図 4.1 の右側に示すように、長径 $2a$ 、短径 $2b$ の楕円 (ellipse) を、短軸を回転軸として 1 回転させた回転体は扁平な回転楕円体 (spheroid) である。回転体ではない楕円体 (ellipsoid) を図 4.1 の中央に示す。地球の形は南北方向に少し扁平な回転楕円体でモデル化されている。回転体の「回転」と、地球の自転の「回転」とが用語として混乱しないように、本書では以下、回転楕円体を単に楕円体と言う。

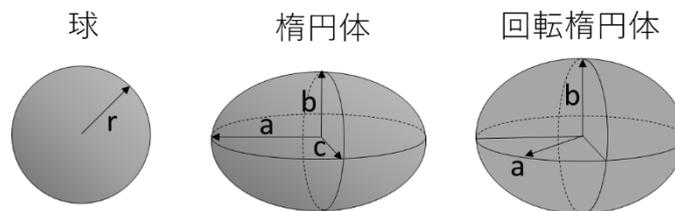


図 4.1 球と楕円体

楕円体を任意の平面で切った断面は楕円であり、回転軸の短軸を含む平面で切った断面は、長径 $2a$ 、短径 $2b$ の合同な楕円となる。楕円体を回転軸の短軸に垂直な平面で切った断面は円となる。特に、原点を通り短軸に垂直な平面で切ると、直径 $2a$ の最大の円となる。

半径 r の球の体積 V は、

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

である。長半径 a 、短半径 b の楕円体の体積 V は、

$$V = \frac{4\pi a^2 b}{3} \tag{4.1}$$

である。楕円体と体積が等しい球の半径を、楕円体の平均半径 R と定義すると、

$$\begin{aligned} \frac{4\pi R^3}{3} &= \frac{4\pi a^2 b}{3} \\ \therefore R^3 &= a^2 b \\ \therefore R &= \sqrt[3]{a^2 b} \end{aligned} \tag{4.2}$$

となる.

4.1.2 球座標系と楕円体座標系

地球の形を表す座標系には, 球座標系や楕円体座標系が使われる. 球座標系 (r, θ, φ) を図 4.2 に示す.

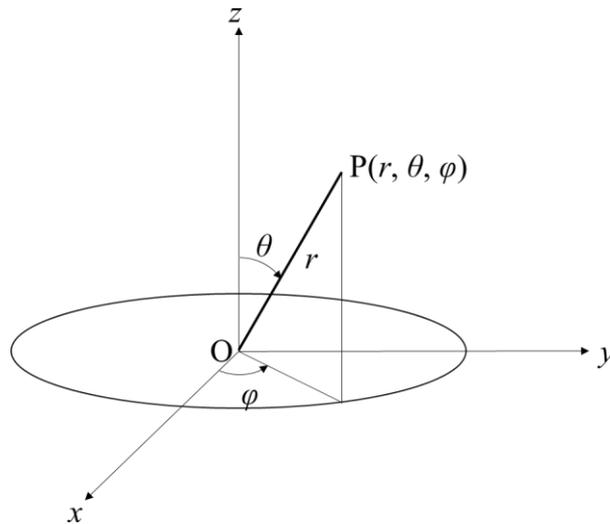


図 4.2 球座標系

径 r は線分 OP の長さであり, 角度 θ は OP が z 軸となす角度であり, 角度 φ は OP の xy 平面への投影が x 軸となす角度である. 径 r は正数とする. 角度 θ は 0° から 180° までの範囲をとり, 角度 φ は 0° から 360° までの範囲をとる. 径 r を一定として, 角度 θ と角度 φ とをすべての範囲で動かしたときの点 P の軌跡は, 半径 r の球面となる.

球座標系から直交座標系への座標変換は,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

となる。

楕円体座標系 (u, θ, φ) を図 4.3 に示す。右側の図は、点 P と z 軸を含む平面で切った断面である。点 P を通る楕円は内側の円に外接し、外側の円に内接している。点 P を通り、 z 軸に平行な直線を引き、外接円と交わる点を点 Q とし、 xy 平面と交わる点を点 R とする。楕円体座標系 (u, θ, φ) の変数 u は内接円の半径であり、角度 θ は、線分 OQ が z 軸となす角度であり、角度 φ は線分 OR が x 軸となす角度である。

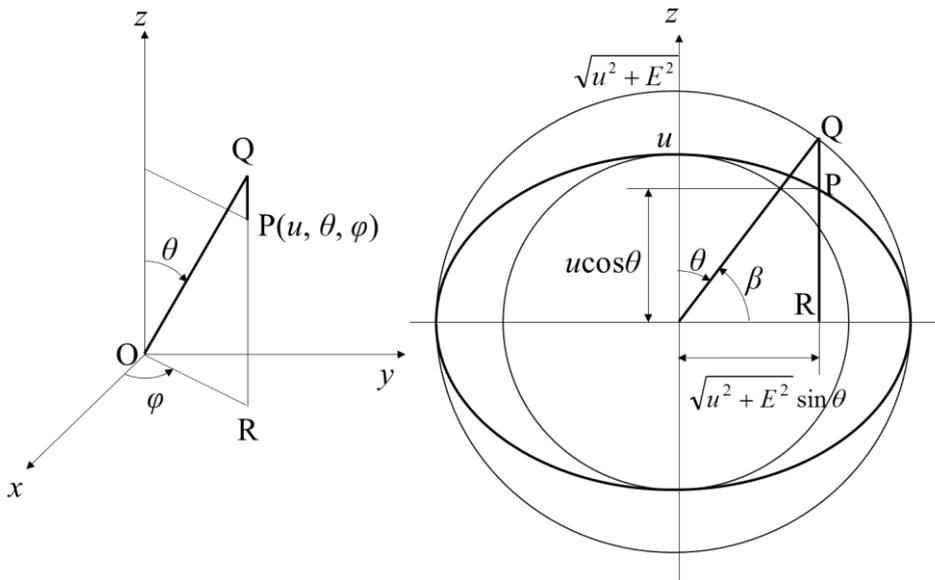


図 4.3 楕円体座標系

楕円に内接する円は、楕円の短半径 u を半径とする円である。楕円に外接する円は、楕円の長半径 $\sqrt{u^2 + E^2}$ を半径とする円である。ここに、記号 E は楕円の焦点距離であり、定数とする。すなわち、楕円体座標系は焦点距離 E ごとに異なる。前節の球座標系は焦点距離 E が 0 のときの楕円体座標系とも言える。

径 u は正数とする。角度 θ は 0° から 180° までの範囲をとり、角度 φ は 0° から 360° までの範囲をとる。径 u を一定として、角度 θ と角度 φ とをすべての範囲で動かしたときの点 P の軌跡は、短半径 u 、長半径 $\sqrt{u^2 + E^2}$ の楕円を z 軸まわりに回転した楕円体となる。

楕円体座標系から直交座標系への座標変換は、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{u^2 + E^2} \sin \theta \cos \phi \\ \sqrt{u^2 + E^2} \sin \theta \sin \phi \\ u \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

となる。ここで、焦点距離 E を 0 とし、径 u を r に置き換えると、球座標系の式 (4.3) に一致する。

4.1.3 地球モデル

地球の表面は陸地と海洋に分かれ、海洋は全表面積の約 71% を占めている。海洋の海面は地球上で連続している。地球の形は球に近く、その断面は円に近い。長さの単位のメートル (m) は、かつては、地球の断面の円の 1/4 周の 10,000 分の 1 として定義されていた。そのように定義すると、地球の周長は 40,000 km で、地球の半径 R は、

$$R = \frac{40000 \times 1000}{2\pi} = 6.37 \times 10^6 \text{ m} = 6370 \text{ km}$$

となる。

Column

角度の 1° の 60 分の 1 を角度の 1 分と言う。角度 1 分あたりの地球表面上の距離は、

$$\frac{10000 \times 1000 \times 4}{360 \times 60} = 1852 \text{ m} = 1.852 \text{ km}$$

である。この 1852 m という距離を 1 海里 (nautical mile) と言い、現在も海洋分野の距離の単位として広く使われている。

球よりも正確な地球モデルとして、図 4.4 に示す楕円体が使われる。この図では楕円を誇張して描いている。

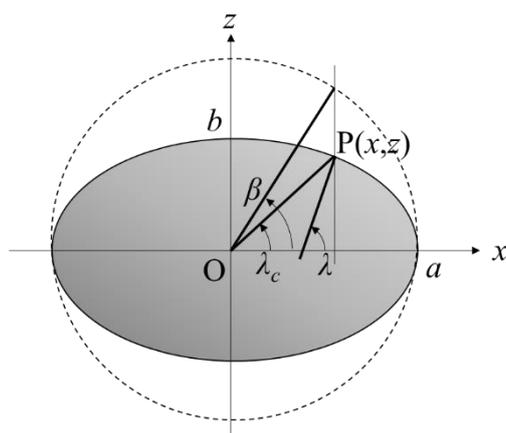


図 4.4 楕円体と緯度

短軸を地球が自転する回転軸とし、その両端を北極と南極とする。回転軸まわりに長軸が描く直径 $2a$ の円が赤道 (equator) である。長半径 a を赤道半径 (equatorial radius) と言い、短半径 b を極半径 (polar radius) と言う。楕円体を短軸に垂直な平面で切った断面 (円) が緯線であり、短軸を含む平面で切った断面 (楕円) が経線または子午線である。

図 4.4 には 3 種類の緯度が示されている。点 P における法線の傾きの角度 λ を地理緯度または測地緯度 (geodetic latitude) と言う。地球の中心 (地心) O と点 P を結んだ線分の傾きの角度 λ_c を地心緯度 (geocentric latitude) と言う。図中の角度 β を更成緯度または化成緯度 (reduced latitude) と言う。どの緯度の場合も、赤道は緯度 0° 、北極は緯度 90° (北緯 90°)、南極は緯度 -90° (南緯 90°) である。後述の図 4.9 からわかるように、北半球の任意の位置において、地球の自転軸の方向 (北極星近くの方) が、その位置の水平面となす角度は地理緯度であり、地図の緯度も地理緯度である。単に緯度 (latitude) と言えば、地理緯度を指すことが多い。

ある地点の子午線を含む平面が、基準とする子午線を含む平面となす角度が経度である。基準の子午線、すなわち本初子午線は、英国のグリニッジ付近を通る子午線である。経度の符号は、 z 軸の右ねじの回転方向となる東向きが正方向である。したがって、図 4.4 の y 軸は緯度 0° 、経度 90° (東経 90°) の方向となる。

地球モデルの楕円体の諸元はいくつかの国際会議ですこしずつ見直されてきた。慣性計測の分野などで広く使われている WGS-84 楕円体の諸元を表 4.1 に示す。

表 4.1 WGS-84 楕円体の諸元

赤道半径	Re (a)	6378137	m
扁平率の逆数	1/f	298.257223563	none
扁平率	f	0.003352811	none
地球の自転角速度	ω	7.292115E-05	rad/s
		15.04106688	deg/h
地球引力定数	GM	3.986004418E+14	m ³ /s ²
極半径	Rp (b)	6356752.3142	m
線離心率	E	521854.00842339	m
第1離心率	e	0.081819190842622	none
第2離心率	e'	0.082094437949696	none
$m = \omega^2 a^2 b / GM$		0.00344978650684	none
q0		0.00007334625787	none
q'0		0.00268804130043	none
e'q'0/q0		3.00865028633565	none
赤道の重力加速度	ge (gWGS0)	9.7803253359	m/s ²
極の重力加速度	gp	9.8321849379	m/s ²
公式の係数	k (gWGS1)	0.00193185265241	none

式 (4.2) を使って，地球の平均半径 R を求めると，

$$R = \sqrt[3]{6378137^2 \times 6356752} = 6.371 \times 10^6 \text{ m} = 6371 \text{ km} \quad (4.5)$$

となる．この値は地球の代表半径としてよく使われる．

4.1.4 楕円

楕円とは，2 個の焦点 (focus) からの距離の和が等しい点の軌跡である．

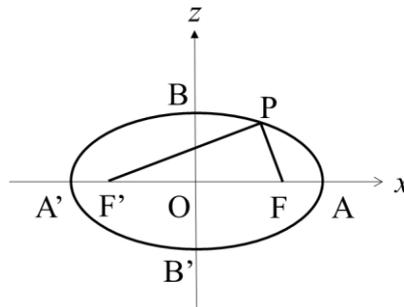


図 4.5 楕円と焦点

図 4.5 の点 F, F' を楕円の焦点 (focus) とし, 焦点 F, F' から長さ $2a$ の伸びない糸 FPF' を緩みなく張ると,

$$\overline{FP} + \overline{F'P} = 2a \quad (4.6)$$

である. 糸を緩めることなく, 頂点 P を一周させたときの軌跡 ABA'B' が楕円となる. 焦点 F, F' の中点を原点 O とすると, $OF = OF'$ であるから,

$$\overline{OA} = \overline{OA'} = a \quad (4.7)$$

となる.

原点 O から焦点 F までの距離 OF と長半径 OA との比を楕円の離心率 (eccentricity) と言いい, 記号 e で表す.

$$e = \frac{\overline{OF}}{\overline{OA}} \quad (4.8)$$

この離心率を使うと, 原点 O から焦点 F までの距離 OF は,

$$\overline{OF} = e \overline{OA} = ea \quad (4.9)$$

となる. 離心率 e は 0 から 1 までの値をとる. 離心率 e が 0 に近づくと, 二つの焦点は一致して, 楕円は半径 a の円に近づく. 離心率 e が 1 に近づくと, 楕円は焦点 F と F' を結ぶ線分 FF' に近づく.

離心率を使って, 楕円の短半径 OB の長さ b を求める. 点 P が縦軸上の点 B に一致すると, 三角形 OFP は直角三角形 OFB となる. その直角三角形 OFB の斜辺の長さは糸の長さ $2a$ の $1/2$, すなわち a であるから, 三平方の定理より,

$$\begin{aligned} \overline{OB}^2 &= \overline{FB}^2 - \overline{OF}^2 \\ \therefore b^2 &= a^2 - (ae)^2 = a^2(1 - e^2) \\ \therefore b &= a\sqrt{1 - e^2} \end{aligned} \quad (4.10)$$

となる. この式からも, 離心率 e が 0 のとき, 短半径 b が長半径 a に一致し, 離心率 e が 1

のとき、短半径 b が 0 となることがわかる。この式を変形すると、

$$\left. \begin{aligned} 1 - e^2 &= \frac{b^2}{a^2} \\ e^2 &= 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \\ e &= \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

となる。

離心率と似た用語に扁平率 (flattening) がある。扁平率 f は、

$$f = 1 - \frac{b}{a} = \frac{a - b}{a} \quad (4.12)$$

と定義される。扁平率 f も 0 から 1 までの値をとる。楕円が円の場合、長半径 a と短半径 b は等しく、扁平率 f は 0 となる。楕円が焦点を結ぶ線分の場合、短半径 b は 0 になり、扁平率 f は 1 となる。離心率 e の二乗を変形すると、

$$\begin{aligned} e^2 &= \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{a - b}{a} \cdot \frac{a + b}{a} = \frac{a - b}{a} \cdot \frac{2a - a + b}{a} \\ &= \frac{a - b}{a} \left(2 - \frac{a - b}{a} \right) = f(2 - f) \end{aligned}$$

となるから、離心率 e と扁平率 f の関係は、

$$e = \sqrt{f(2 - f)} \quad (4.13)$$

となる。扁平率 f が 0 のとき、離心率 e も 0 となり、扁平率 f が 1 のとき、離心率 e も 1 となる。

表 4.1 より、地球の離心率 e は約 0.08 であり、断面の楕円の焦点は、地球の半径の約 8% だけ中心から離れている。地球の扁平率 f は約 1/300 であり、赤道半径と極半径の差は半径の約 1/300 である。

4.1.5 楕円の式

(1) 更成緯度を媒介変数とする楕円の式

図 4.4 において, xz 平面の直交座標系による楕円の方程式は,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (4.14)$$

である。(問題 4.1 参照) この式を使って, 焦点 F, F' から点 P までの距離 $FP, F'P$ を求めると,

$$\left. \begin{array}{l} \overline{FP} = a - ex \\ \overline{F'P} = a + ex \end{array} \right\} \quad (4.15)$$

となり, x 座標の 1 次式となる. 二つの線分の長さの和は確かに $2a$ となる。(問題 4.2 参照)

三角関数の定理より $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ であるから, 式 (4.14) は更成緯度 β を使って,

$$\left. \begin{array}{l} x = a \cos \beta \\ z = b \sin \beta \end{array} \right\} \quad (4.16)$$

と表すことができる.

(2) 地心緯度を媒介変数とする楕円の式

地心からの距離 r と地心緯度 λ_c を使って, 点 P の座標を表すと,

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \lambda_c \\ z = r \sin \lambda_c \end{array} \right\} \quad (4.17)$$

となる. この式を楕円の方程式 (4.14) に代入すると,

$$\begin{aligned}
 \frac{r^2 \cos^2 \lambda_c}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \lambda_c}{b^2} &= 1 \\
 \therefore r^2 \left(\frac{\cos^2 \lambda_c}{a^2} + \frac{\sin^2 \lambda_c}{b^2} \right) &= 1 \\
 \therefore r^2 &= \frac{1}{\frac{\cos^2 \lambda_c}{a^2} + \frac{\sin^2 \lambda_c}{b^2}} = \frac{b^2}{\frac{b^2 \cos^2 \lambda_c}{a^2} + (1 - \cos^2 \lambda_c)} \\
 &= \frac{b^2}{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cos^2 \lambda_c} = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \lambda_c} \\
 \therefore r &= \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \lambda_c}}
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

となる。長軸上では地心緯度 λ_c が 0 であるから、 $r = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2}} = a$ となり、短軸上では地心緯度 λ_c が 90° であるから、 $r = b$ となる。

地心緯度 λ_c と更成緯度 β との関係は、

$$\tan \lambda_c = \frac{z}{x} = \frac{b \sin \beta}{a \cos \beta} = \frac{b}{a} \tan \beta = \sqrt{1 - e^2} \tan \beta \tag{4.19}$$

となる。

(3) 地理緯度を媒介変数とする楕円の式

楕円の接線 (tangent line) と法線 (normal line) を図 4.6 に示す。

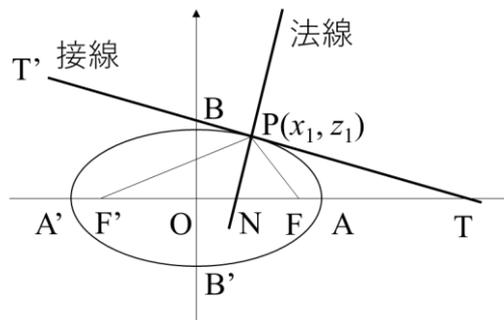


図 4.6 楕円の接線と法線

楕円上の点 $P(x_1, z_1)$ において楕円の方程式 (4.14) を微分して変形すると、接線の傾きは、

$$\begin{aligned}
\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{z_1^2}{b^2} &= 1 \\
\therefore \frac{2x_1 dx_1}{a^2} + \frac{2z_1 dz_1}{b^2} &= 0 \\
\therefore b^2 x_1 dx_1 + a^2 z_1 dz_1 &= 0 \\
\therefore \frac{dz_1}{dx_1} &= -\frac{b^2 x_1}{a^2 z_1}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

となる。したがって、点 P における接線の方程式は、

$$z - z_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 z_1} (x - x_1) \tag{4.21}$$

となる。この式を変形すると、接線の方程式は、

$$\begin{aligned}
\frac{z_1(z - z_1)}{b^2} &= -\frac{x_1(x - x_1)}{a^2} \\
\therefore \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{z_1 z}{b^2} &= \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{z_1^2}{b^2} \\
\therefore \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{z_1 z}{b^2} &= 1
\end{aligned} \tag{4.22}$$

と表すこともできる。法線は接線と直交し、両者の傾きの積は -1 であることより、点 P における法線の方程式は、

$$z - z_1 = \frac{a^2 z_1}{b^2 x_1} (x - x_1) \tag{4.23}$$

となる。法線が x 軸と交わる点 N の x 座標 x_N を求めると、

$$\begin{aligned}
0 - z_1 &= \frac{a^2 z_1}{b^2 x_1} (x_N - x_1) \\
\therefore x_N &= x_1 - \frac{b^2 x_1 z_1}{a^2 z_1} = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) x_1 \\
\therefore x_N &= \overline{ON} = e^2 x_1
\end{aligned} \tag{4.24}$$

となり、離心率 e の二乗と点 P の x 座標 x_1 の積となる。楕円が円の場合、離心率 e は 0 であり、点 N は原点 O に一致する。楕円が焦点を結ぶ線分の場合、離心率 e は 1 であり、点 N と点 P は一致する。式 (4.24) の関係を使うと、緯度の傾き $\tan \lambda$ は、

$$\tan \lambda = \frac{z}{x - \text{ON}} = \frac{z}{x - e^2 x} = \frac{z}{(1 - e^2)x} \quad (4.25)$$

となる。この式の右辺に式 (4.16) を代入して、更成緯度 β で表すと、

$$\tan \lambda = \frac{b \sin \beta}{(1 - e^2) a \cos \beta} = \frac{b \tan \beta}{(1 - e^2) a}$$

となる。さらに、式 (4.10) を使うと、

$$\tan \lambda = \frac{\sqrt{1 - e^2} \tan \beta}{1 - e^2} = \frac{\tan \beta}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (4.26)$$

となる。式 (4.19) を代入して、地心緯度 λ_c で表すと、

$$\tan \lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \cdot \frac{\tan \lambda_c}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{\tan \lambda_c}{1 - e^2} \quad (4.27)$$

となる。この式より、

$$\begin{aligned} \tan \lambda_c &= \frac{z}{x} = (1 - e^2) \tan \lambda \\ \therefore z &= x (1 - e^2) \tan \lambda \end{aligned}$$

となる。この式を楕円の方程式 (4.14) に代入すると、

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2(1-e^2)^2 \tan^2 \lambda}{b^2} &= 1 \\
 \therefore x^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{(1-e^2)^2 \tan^2 \lambda}{b^2} \right) &= 1 \\
 \therefore x^2 &= \frac{b^2}{\frac{b^2}{a^2} + (1-e^2)^2 \tan^2 \lambda} = \frac{a^2 \cdot \frac{b^2}{a^2}}{\frac{b^2}{a^2} + (1-e^2)^2 \tan^2 \lambda} \\
 &= \frac{a^2(1-e^2)}{(1-e^2) + (1-e^2)^2 \tan^2 \lambda} = \frac{a^2}{1 + (1-e^2) \tan^2 \lambda} \\
 &= \frac{a^2}{1 + \tan^2 \lambda - e^2 \tan^2 \lambda} = \frac{a^2 \cos^2 \lambda}{1 - e^2 \sin^2 \lambda} \\
 \therefore z^2 &= \frac{a^2 \cos^2 \lambda}{1 - e^2 \sin^2 \lambda} \cdot (1-e^2)^2 \tan^2 \lambda = \frac{a^2(1-e^2)^2 \sin^2 \lambda}{1 - e^2 \sin^2 \lambda} \\
 \therefore \left. \begin{aligned} x &= \frac{a \cos \lambda}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \lambda}} \\ z &= \frac{a(1-e^2) \sin \lambda}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \lambda}} \end{aligned} \right\} & \quad (4.28)
 \end{aligned}$$

となる。長軸上では、緯度 λ が 0 であり、 $(x, z) = (a, 0)$ となる。短軸上では、緯度 λ が 90° であり、 $(x, z) = (0, b)$ となる。

4.1.6 楕円体の曲率半径

平面上の曲線 $z=f(x)$ の曲率半径 R は、

$$R = \frac{(1 + f'(x)^2)^{1.5}}{f''(x)} \quad (4.29)$$

である。ここに、 $f'(x)$ は曲線 $z=f(x)$ を座標 x で 1 回微分した 1 次の導関数であり、 $f''(x)$ は曲線 $z=f(x)$ を座標 x で 2 回微分した 2 次の導関数である。曲線が媒介変数 t を使って $x=f(t), z=g(t)$ と表される場合の曲率半径 R は、

$$R = \frac{(f'(t)^2 + g'(t)^2)^{1.5}}{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)} \quad (4.30)$$

である。ここに、 $f'(t), g'(t)$ はそれぞれ曲線 $x=f(t), z=g(t)$ を媒介変数 t で 1 回微分した 1 次導関数、 $f''(t), g''(t)$ はそれぞれ曲線 $x=f(t), z=g(t)$ を媒介変数 t で 2 回微分した 2 次導

関数である。(問題 4.3 参照)

楕円の曲率半径を求めるにあたり，更成緯度 β による楕円の方程式 (4.16) を使うと，

$$\left. \begin{aligned} x(\beta) &= a \cos \beta \\ z(\beta) &= b \sin \beta \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \therefore x'(\beta) &= -a \sin \beta \\ z'(\beta) &= b \cos \beta \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \therefore x''(\beta) &= -a \cos \beta \\ z''(\beta) &= -b \sin \beta \end{aligned} \right\}$$

となる。これらの式を式 (4.30) に代入すると，曲率半径 R は，

$$\begin{aligned} R &= \frac{(x'(\beta)^2 + z'(\beta)^2)^{1.5}}{x'(\beta)z''(\beta) - x''(\beta)z'(\beta)} = \frac{(a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta)^{1.5}}{ab \sin^2 \beta + ab \cos^2 \beta} \\ &= \frac{(a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta)^{1.5}}{ab(\sin^2 \beta + \cos^2 \beta)} = \frac{(a^2(1 - \cos^2 \beta) + b^2 \cos^2 \beta)^{1.5}}{ab} \\ &= \frac{(a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 \beta)^{1.5}}{ab} = \frac{a^3 \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2 \beta\right)^{1.5}}{ab} \\ &= \frac{a^2(1 - e^2 \cos^2 \beta)^{1.5}}{b} \end{aligned} \tag{4.31}$$

となる。楕円の曲率半径 R が更成緯度 β を使って表された。ここで，式 (4.26) より，

$$\begin{aligned} \tan \beta &= \sqrt{1 - e^2} \tan \lambda \\ \therefore \cos \beta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (1 - e^2) \tan^2 \lambda}} \end{aligned} \tag{4.32}$$

であるから，式 (4.31) に代入すると，

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{a^2 \left(1 - \frac{e^2}{1 + (1 - e^2) \tan^2 \lambda} \right)^{1.5}}{\sqrt{1 - e^2} a} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} \left(\frac{1 + \tan^2 \lambda - e^2 (1 + \tan^2 \lambda)}{1 + \tan^2 \lambda - e^2 \tan^2 \lambda} \right)^{1.5} \\
 &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} \left(\frac{1 - e^2}{1 - e^2 \frac{\tan^2 \lambda}{1 + \tan^2 \lambda}} \right)^{1.5} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} \left(\frac{1 - e^2}{1 - e^2 \sin^2 \lambda} \right)^{1.5} \\
 \therefore R &= \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \lambda)^{1.5}} \tag{4.33}
 \end{aligned}$$

となる。楕円面内の曲率半径 R が緯度 λ を使って表された。緯度 λ が 0° の赤道において、最小値の $R = a(1 - e^2) = \frac{b^2}{a}$ となる。緯度 λ が $\pm 90^\circ$ の極において、最大値の $R = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{a^2}{b}$ となる。

図 4.7 において、点 P を通り z 軸に垂直な平面で楕円体を切った断面の円は、点 P を通る緯線であり、その円の半径は点 P の x 座標である。点 P の法線を含み子午面と直交する平面で楕円体を切る。その割線を卯酉線（ぼうゆうせん）と言う。子午線の子は北、午は南、卯酉線の卯は東、酉は西を意味する。十二支による方位表示に由来する。卯酉線の曲率半径は、図中の円錐の母線の長さ R_{normal} となる。

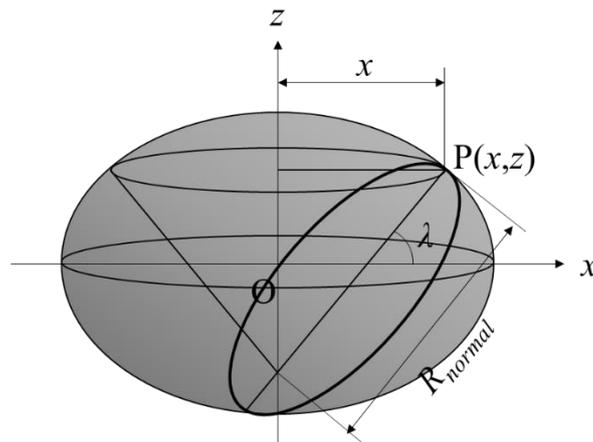


図 4.7 子午線と直交する断面の曲率半径

曲率半径 R_{normal} を点 P の x 座標と緯度 λ を使って表すと、

$$x = R_{\text{normal}} \cos \lambda$$

$$\therefore R_{\text{normal}} = \frac{x}{\cos \lambda}$$

となる。式 (4.28) を代入して、座標 x を消去すると、

$$R_{\text{normal}} = \frac{1}{\cos \lambda} \cdot \frac{a \cos \lambda}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \lambda}} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \lambda}} \quad (4.34)$$

となる。緯度 λ が 0° の赤道において $R_{\text{normal}} = a$ となり、赤道半径に等しくなる。緯度 λ が $\pm 90^\circ$ の極において、最大値の $R_{\text{normal}} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{a^2}{b}$ となり、極における子午面内の曲率半径と等しくなる。(問題 4.4 参照)

地球の曲率半径を、緯度 λ を使って表すと、式 (4.33) と式 (4.34) より、

$$\left. \begin{aligned} R_N &= \frac{R_e(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \lambda)^{1.5}} \\ R_E &= \frac{R_e}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \lambda}} \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

となる。ここに、記号 R_N は子午線の曲率半径であり、記号 R_E は卯酉線の曲率半径である。南北方向と東西方向を平均した平均曲率半径 R として、両者の幾何平均、すなわち積の平方根がよく使われる。

$$R = \sqrt{R_N R_E} \quad (4.36)$$

この平均曲率半径の式を使うと、緯度 $\lambda = 0^\circ$ の赤道上では 6357 km、緯度 $\lambda = \pm 45^\circ$ では 6378 km、緯度 $\lambda = 90^\circ$ の極では 6400 km となる。

4.2 地球の自転角速度

地球は自転軸まわりに非常に安定した自転を続けている。太陽が南中してから、翌日に南中するまでの時間は 24 時間であり、太陽日 (solar day) と言う。慣性系において地球が 360° 回転する時間を恒星日 (sidereal day) と言う。図 4.8 に示すように、地球が太陽のまわりを公転していることより、恒星日は太陽日の 24 時間より少し短く、1 太陽日に地球が自転す

る角度は 360° より少し大きい。地球が 1 回公転する 1 年の間に、その角度差の合計は 360° となる。

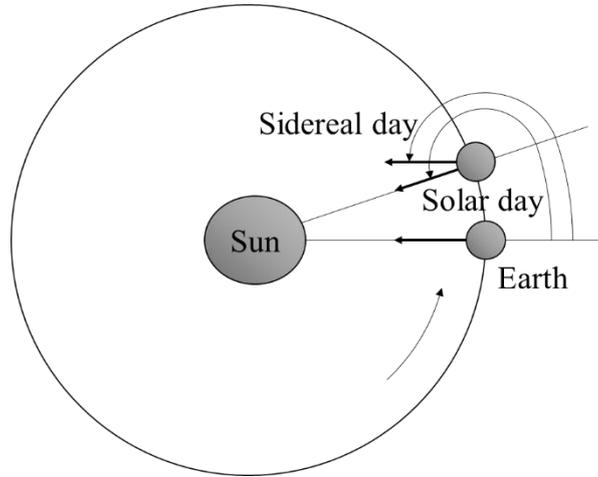


図 4.8 太陽日と恒星日

地球の公転周期の 1 年は、約 365.24 日であり、その間に地球は 365.24 回転よりも 1 回転多い 366.24 回転することになるから、自転角速度 Ω は、

$$\Omega = \frac{360 \times 366.24}{365.24 \times 24} \cong 15.04 \frac{\text{deg}}{\text{h}} \cong 7.292 \times 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

となる。正確な値を表 4.1 に示した。地球の自転角速度は 1 時間当たり約 15° の小さい角速度であるが、太陽や月の日周運動として、視覚で実感することができる。また、高精度な角速度センサを使うと定量的に検知することができる。

ECI 座標系における地球の自転角速度は、地球の自転軸の z_i 軸まわりであるから、

$$\boldsymbol{\Omega}^i = \begin{bmatrix} \Omega_{x_i} \\ \Omega_{y_i} \\ \Omega_{z_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

となる。ECEF 座標系における地球の自転角速度も、同じく地球の自転軸の z_e 軸まわりであるから、

$$\boldsymbol{\Omega}^e = \begin{bmatrix} \Omega_{x_e} \\ \Omega_{y_e} \\ \Omega_{z_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

となる。この式は、ECI 座標系から ECEF 座標系の座標変換からも求めることができる。ECI 座標系から ECEF 座標系へ方向余弦行列の式 (3.11) と式 (4.37) の積より、

$$\boldsymbol{\Omega}^e = \mathbf{C}_i^e \boldsymbol{\Omega}^i = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix}$$

となり、確かに式 (4.38) と一致する。

緯度 λ の位置における地球の自転角速度を図 4.9 に示す。赤道上では角速度の鉛直成分が 0、水平成分が最大値 Ω となる。極においては角速度の水平成分が 0、鉛直成分が最大値 Ω となる。

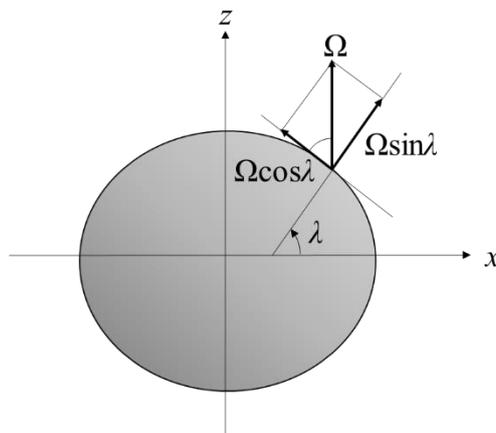


図 4.9 地球の自転角速度

航法座標系における地球の自転角速度 $\boldsymbol{\Omega}^n$ は、

$$\boldsymbol{\Omega}^n = \begin{bmatrix} \Omega_N \\ \Omega_E \\ \Omega_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega \cos \lambda \\ 0 \\ -\Omega \sin \lambda \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

となる。この式は、ECI 座標系と航法座標系の座標変換からも求めることができる。ECI 座

標系から航法座標系への方向余弦行列の式 (3.21) と式 (4.37) の積より,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}^n &= \mathbf{C}_i^n \boldsymbol{\Omega}^i \\ &= \begin{bmatrix} -\sin \lambda \cos(\theta + \mu) & -\sin \lambda \sin(\theta + \mu) & \cos \lambda \\ -\sin(\theta + \mu) & \cos(\theta + \mu) & 0 \\ -\cos \lambda \cos(\theta + \mu) & -\cos \lambda \sin(\theta + \mu) & -\sin \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega \cos \lambda \\ 0 \\ -\Omega \sin \lambda \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となり, 確かに式 (4.39) と一致する.