調和関数

ラプラス方程式（Laplace's equation）の解であって，正則な（微分可能な）関数を調和関数（harmonic function）と言う．代表的な座標系（直交座標系，球座標系，楕円体座標系）における調和関数を以下に求める．「ラプラス方程式」の詳細は参考文献 1 を参照.

1．直交座標系の調和関数

図 1 に示すような直交座標系（orthogonal coordinates）では，任意の点 P は座標（ x, y, z ）で表される．各座標の範囲は，$-\infty < x, y, z < \infty$ である．

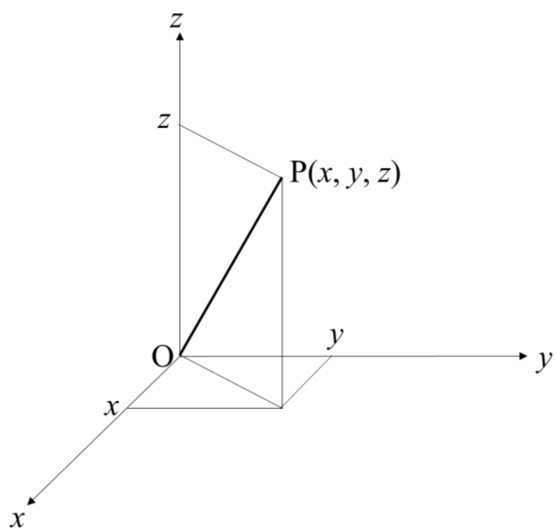

図 1　直交座標系

このような直交座標系におけるラプラス方程式は,

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad (1\text{-}1)$$

の 2 次の偏微分方程式である．ここに，記号 Δ はラプラス演算子あるいはラプラシアン（Laplacian）と呼ばれ， ∇^2 とも表記される．記号 V は求める調和関数であり，座標 x, y, z の何らかの関数である．

線分 OP の長さを $r\,(>0)$ とすると，

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{1-2}$$

である．ここで，線分 OP の長さの逆数 $1/r$ を考える．

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{1-3}$$

実は，この $1/r$ は最も簡単な調和関数（ラプラス方程式の解）であることが知られている．実際に，$1/r$ を x で偏微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)&=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\&=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\frac{x}{r^3}\end{aligned} \tag{1-4}$$

となる．同様に，$1/r$ を y, z で偏微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)&=-\frac{y}{r^3}\\\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)&=-\frac{z}{r^3}\end{aligned} \tag{1-5}$$

となる．$1/r$ を x で 2 回偏微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right)=-\left(\frac{1}{r^3}+x\left(-3\cdot\frac{1}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right)\\&=-\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3x}{r^4}\cdot\frac{x}{r}\right)\\&=\frac{-r^2+3x^2}{r^5}\end{aligned} \tag{1-6}$$

となる．同様に，$1/r$ を y, z で 2 回偏微分すると，

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{-r^2+3y^2}{r^5}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{-r^2+3z^2}{r^5} \tag{1-7}$$

となる．式(1-6)と式(1-7)の 3 式を足すと，

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{-r^2+3x^2}{r^5}+\frac{-r^2+3y^2}{r^5}+\frac{-r^2+3z^2}{r^5}$$
$$=\frac{-3r^2+3\left(x^2+y^2+z^2\right)}{r^5}=\frac{-3r^2+3r^2}{r^5}=0 \tag{1-8}$$

となり，確かに式(1-1) を満足する．すなわち，直交座標系における最も簡単な調和関数（ラプラス方程式の解）は，

$$V=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{1-9}$$

である．この解以外にもラプラス方程式の解はあり，

$$V=const. \tag{1-10}$$

例えば，$V=0$ も明らかに式(1-1) を満足する．境界条件によって解は決まる．

2. 球座標系の調和関数

図 2 に示すような球座標系（spherical coordinates）では，任意の点 P は座標（ r, θ, λ）で表される．ここに，r は半径 OP の長さ， θ は半径 r が z 軸となす角度， λ は半径 r を xy 座標面（赤道面）へ投影した直線と x 軸がなす角度，すなわち経度である．各座標の範囲は，$r \geqq 0$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$, $0 \leqq \lambda \leqq 2\pi$ である．半径 r が一定の点 P の集合は，半径 r の球面となる．

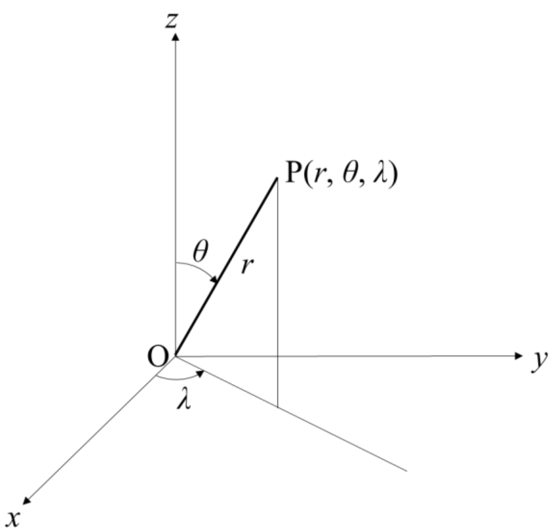

図 2　球座標系

球座標系におけるラプラス方程式は,

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\lambda^2} = 0 \tag{2-1}$$

である．上式中の偏微分を進めて両辺に r^2 を掛けると,

$$r^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial V}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\lambda^2} = 0 \tag{2-2}$$

とも表される．このラプラス方程式の解 $V(r,\theta,\lambda)$ として次式の変数分離形を仮定する．

$$V(r,\theta,\lambda) = f(r)Y(\theta,\lambda) \tag{2-3}$$

式(2-2) に上式を代入すると,

$$
r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} fY + 2r \frac{\partial}{\partial r} fY + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} fY + \frac{1}{\tan\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} fY + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} fY = 0
$$
$$
\therefore \left(r^2 f'' + 2rf'\right) Y + f \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan\theta} \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} \right) = 0
$$
$$
\therefore \frac{1}{f}\left(r^2 f'' + 2rf'\right) = -\frac{1}{Y} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan\theta} \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} \right) \tag{2-4}
$$

となる．左辺は f のみの関数，右辺は Y のみの関数であり，式(2-3）の変数分離の仮定が成立した．両辺は定数でなくてはならない．この定数を $n(n+1)$ とおくと，以下の 2 式が得られる．

$$
\frac{1}{f}\left(r^2 f'' + 2rf'\right) = n(n+1)
$$
$$
\therefore r^2 f'' + 2rf' - n(n+1) = 0 \tag{2-5}
$$

$$
-\frac{1}{Y} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan\theta} \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} \right) = n(n+1)
$$
$$
\therefore \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan\theta} \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} + n(n+1)Y = 0 \tag{2-6}
$$

式(2-5）は f に関する 2 次の常微分方程式である．この式の解は，

$$
f(r) = r^n \tag{2-7}
$$

$$
f(r) = r^{-n-1} \tag{2-8}
$$

の 2 式であることが知られている．実際に，第一の式(2-7）を 2 回微分すると，

$$
\begin{aligned}
f'(r) &= nr^{n-1} \\
f''(r) &= n(n-1)r^{n-2}
\end{aligned} \tag{2-9}
$$

であるから，式(2-5）に上式を代入すると，

$$\begin{aligned}&r^2 f'' + 2rf' - n(n+1)f\\&\quad = r^2 \cdot n(n-1)r^{n-2} + 2r \cdot nr^{n-1} - n(n+1)\cdot r^n\\&\quad = n(n-1)r^n + 2nr^n - n(n+1)r^n\\&\quad = n\left((n-1)+2-(n+1)\right)r^n = 0\end{aligned} \tag{2-10}$$

となり，確かに式(2-5) の解となっている．また，第二の式(2-8) を 2 回微分すると，

$$\begin{aligned}&f'(r) = -(n+1)r^{-n-2}\\&f''(r) = (n+1)(n+2)nr^{-n-3}\end{aligned} \tag{2-11}$$

であるから，式(2-5) に代入すると，

$$\begin{aligned}&r^2 f'' + 2rf' - n(n+1)f\\&\quad = r^2 \cdot (n+1)(n+2)nr^{-n-3} - 2r\cdot(n+1)r^{-n-2} - n(n+1)\cdot r^{-n-1}\\&\quad = (n+1)\left((n+2)-2-n\right)\cdot r^{-n-1} = 0\end{aligned} \tag{2-12}$$

となり，第二の式（2-8）も式(2-5) の解となっている．二通りの f の式を式(2-3) に代入すると，

$$\begin{aligned}&V = f(r)Y(\theta,\lambda) = r^n Y_n(\theta,\lambda)\\&V = f(r)Y(\theta,\lambda) = \frac{Y_n(\theta,\lambda)}{r^{n+1}}\end{aligned} \tag{2-13}$$

となる．ここに，定数 n に対応する Y を Y_n と表している．次に，この Y_n を求めるにあたって，次式の変数分離形を仮定する．

$$Y_n(\theta,\lambda) = g(\theta)h(\lambda) \tag{2-14}$$

式(2-6) に上式を代入すると，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}gh+\frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}gh+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}gh+n(n+1)gh=0\\
&\therefore g''h+\frac{1}{\tan\theta}g'h+\frac{1}{\sin^2\theta}gh''+n(n+1)gh=0\\
&\therefore \left(g''+\frac{1}{\tan\theta}g'+n(n+1)g\right)h=-\frac{1}{\sin^2\theta}gh''\\
&\therefore \frac{\sin^2\theta}{g}\left(g''+\frac{1}{\tan\theta}g'+n(n+1)g\right)=-\frac{h''}{h}\\
&\therefore \frac{\sin\theta}{g}\left(\sin\theta\cdot g''+\cos\theta\cdot g'+n(n+1)\sin\theta\cdot g\right)=-\frac{h''}{h}
\end{aligned}
\tag{2-15}
$$

となる．左辺は $g(\theta)$ のみの関数，右辺は $h(\lambda)$ のみの関数であり，式(2-14) の変数分離の仮定が成立した．両辺は定数でなくてはならない．この定数を m^2 とおくと，以下の 2 式が得られる．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sin\theta}{g}\left(\sin\theta\cdot g''+\cos\theta\cdot g'+n(n+1)\sin\theta\cdot g\right)=m^2\\
&\therefore \sin\theta\cdot g''+\cos\theta\cdot g'+n(n+1)\sin\theta\cdot g=\frac{g}{\sin\theta}m^2\\
&\therefore \sin\theta\cdot g''+\cos\theta\cdot g'+\left(n(n+1)\sin\theta-\frac{m^2}{\sin\theta}\right)g=0
\end{aligned}
\tag{2-16}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{h''}{h}=m^2\\
&\therefore -h''=m^2h\\
&\therefore h''+m^2h=0
\end{aligned}
\tag{2-17}
$$

となる．式(2-17) は h に関する 2 次の常微分方程式であり，その解は直ちに，

$$
\begin{aligned}
&h(\lambda)=\cos m\lambda\\
&h(\lambda)=\sin m\lambda
\end{aligned}
\tag{2-18}
$$

である．式(2-16) は $g(\theta)$ に関する 2 次の微分方程式であり，

$$
t=\cos\theta \tag{2-19}
$$

と変数変換すると，

$$
\begin{aligned}
g'(\theta)&=\frac{dg}{d\theta}=\frac{dg}{dt}\frac{dt}{d\theta}=-\frac{dg}{dt}\sin\theta\\
g''(\theta)&=\frac{d^2g}{d\theta^2}=\frac{d}{d\theta}\frac{dg}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{dg}{dt}\sin\theta\right)\\
&=-\frac{d}{dt}\frac{dt}{d\theta}\frac{dg}{dt}\sin\theta-\frac{dg}{dt}\cos\theta\\
&=-\frac{d}{dt}(-\sin\theta)\frac{dg}{dt}\sin\theta-\frac{dg}{dt}\cos\theta\\
&=\frac{d^2g}{dt^2}\sin^2\theta-\frac{dg}{dt}\cos\theta
\end{aligned}
\tag{2-20}
$$

であるから，式(2-16) に上式を代入すると，

$$
\begin{aligned}
&\sin\theta\cdot g''+\cos\theta\cdot g'+\left(n(n+1)\sin\theta-\frac{m^2}{\sin\theta}\right)g=0\\
&\therefore\sin\theta\cdot\left(\frac{d^2g}{dt^2}\sin^2\theta-\frac{dg}{dt}\cos\theta\right)+\cos\theta\cdot\left(-\frac{dg}{dt}\sin\theta\right)+\left(n(n+1)\sin\theta-\frac{m^2}{\sin\theta}\right)g=0\\
&\therefore\frac{d^2g}{dt^2}\sin^3\theta-\frac{dg}{dt}\sin\theta\cos\theta-\frac{dg}{dt}\sin\theta\cos\theta+\left(n(n+1)\sin\theta-\frac{m^2}{\sin\theta}\right)g=0\\
&\therefore\frac{d^2g}{dt^2}\sin^3\theta-2\frac{dg}{dt}\sin\theta\cos\theta+\left(n(n+1)\sin\theta-\frac{m^2}{\sin\theta}\right)g=0\\
&\therefore\frac{d^2g}{dt^2}\sin^2\theta-2\frac{dg}{dt}\cos\theta+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)g=0\\
&\therefore\left(1-t^2\right)\frac{d^2g}{dt^2}-2t\frac{dg}{dt}+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{1-t^2}\right)g=0
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\frac{d}{dt}\left(\left(1-t^2\right)\frac{dg}{dt}\right)+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{1-t^2}\right)g=0 \tag{2-21}
$$

となる．この g に関する常微分方程式はルジャンドルの陪微分方程式と呼ばれる方程式である．ルジャンドルの陪微分方程式には，第 1 種ルジャンドル陪関数 P_{nm} と第 2 種ルジャンドル陪関数 Q_{nm} の 2 種類の解があることが知られている．「ルジャンドル陪関数」の詳細は関連文書 3 を参照.

角度 θ の範囲は $0\leqq\theta\leqq\pi$ であり，式(2-19) より t の範囲は$-1\leqq t\leqq 1$ であるが，第 2 種ルジャンドル陪関数 Q_{nm} は $t=\pm 1$ に特異点を持つ．図 2 において $\theta=0$ と $\theta=\pi$，すなわち z

軸上の点は特異点となり正則ではないため，g の解とはならない．よって，g の解は，第 1 種ルジャンドル陪関数 P_{nm} を使って，

$$g(\theta) = P_{nm}(\cos\theta) \tag{2-22}$$

となる．式(2-18) と式(2-22) より，Y_n の式の解は，

$$\begin{aligned} Y_n(\theta,\lambda) &= P_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda \\ Y_n(\theta,\lambda) &= P_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda \end{aligned} \tag{2-23}$$

となる．以上より，球座標系における調和関数（ラプラス方程式(2-2) の解）は，

$$V(r,\theta,\lambda) = \begin{Bmatrix} r^n \\ \dfrac{1}{r^{n+1}} \end{Bmatrix} P_{nm}(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} \tag{2-24}$$

と導かれた．ここに，記号{}は，2 個のうちどちらかを選ぶことを示す．下図は，球の赤道面（図 2 の xy 平面）上の調和関数 V の分布の一例を示す．青線は赤道，橙線は $m = 6$ の場合の cos 6 λ の分布形状を示す．m の数だけ山の数と谷の数がある．

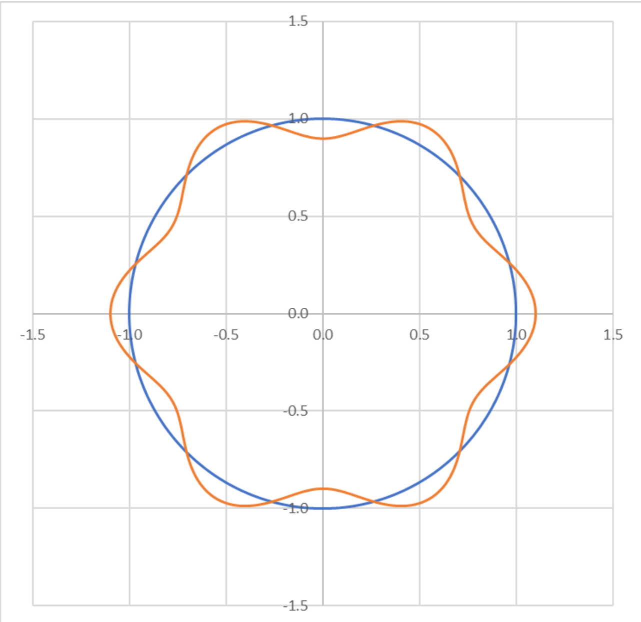

図 3 球調和関数の赤道上分布の例

下図は，球の子午面（図 2 の z 軸を含む平面）上の調和関数 V の分布の一例を示す．青線は子午線，橙線は $P_{60}(\cos\theta)$の分布形状を示す．6 個の山の数と谷の数がある．

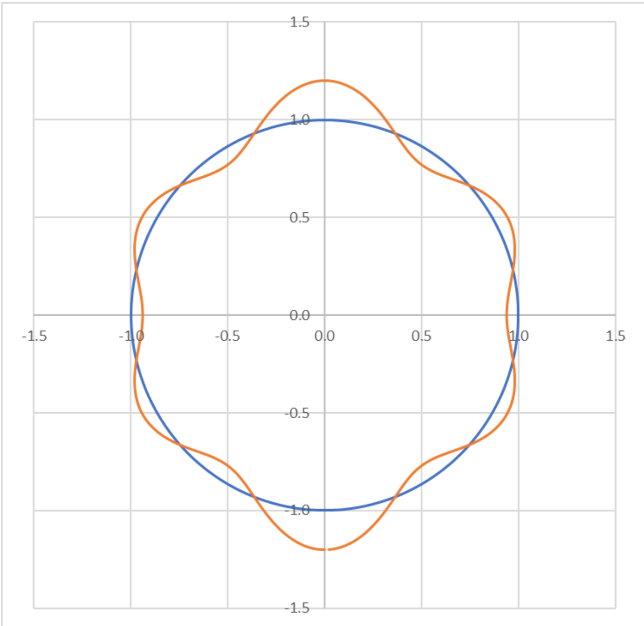

図 4 球調和関数の子午線上分布の例

一般解は，a_{nm}, b_{nm} を任意の定数として，

$$
\begin{aligned}
V(r,\theta,\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^{n} \left(a_{nm}P_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda + b_{nm}P_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda\right) \\
V(r,\theta,\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^{n} \left(a_{nm}P_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda + b_{nm}P_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda\right)
\end{aligned}
\tag{2-25}
$$

と表せる．定数 a_{nm}, b_{nm} は境界条件から決まる．もっとも簡単な場合として，$n = m = 0$ の場合を考えると，

$$
V(r,\theta,\lambda) = \begin{Bmatrix} r^0 \\ \dfrac{1}{r^{0+1}} \end{Bmatrix} P_{00}(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{r} \end{Bmatrix} \cdot 1 \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}
\tag{2-26}
$$

となり，$V = 0, 1, 1/r$ となる（ここに，$P_{00}(x) = 1$ の関係を使った）．これらは直交座標系の場合の調和関数の式(1-9), (1-10）に一致する．

3. 楕円体座標系のラプラス方程式

図 5 の左図に示すような楕円体座標系（ellipsoidal coordinates）では，任意の点 P は座標（u，θ，λ）とパラメータ E で表される．ここに，u は径 OQ の長さ，θ は径 u が z 軸となす角度，λ は径 u を xy 座標面（赤道面）へ投影した直線と x 軸がなす角度，すなわち経度である．図 5 の右図は，径 u と z 軸を含む平面で切った断面である．座標の範囲は，$u \geqq 0$，$0 \leqq \theta \leqq \pi$，$0 \leqq \lambda \leqq 2\pi$ である．右図の楕円断面の長半径を a，z 軸方向の短半径を b とすると，パラメータ E は次式で定義される．

$$E^2 = a^2 - b^2 \tag{3-1}$$

径 $u = b$ で一定の点 P の集合は，長半径 a，短半径 b の楕円体面となる．このとき，点 Q の集合は，楕円体に外接する半径 a の球面となる．

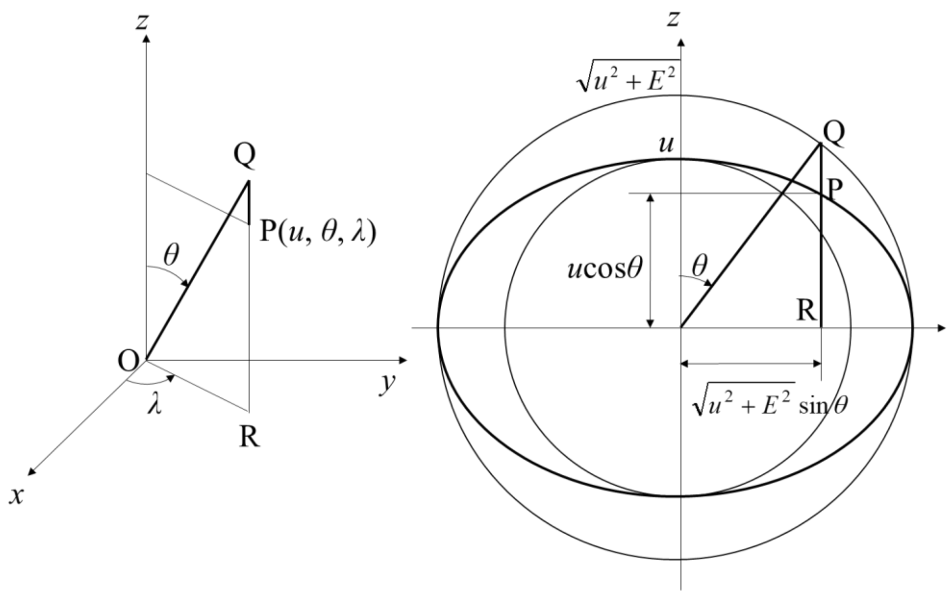

図 5　楕円体座標系

楕円体座標系におけるラプラス方程式は，

$$\Delta V = \frac{1}{u^2 + E^2\cos^2\theta}\left(\begin{aligned} &\left(u^2+E^2\right)\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + 2u\frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial V}{\partial \theta} \\ &+ \frac{u^2+E^2\cos^2\theta}{\left(u^2+E^2\right)\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} \end{aligned} \right) = 0 \tag{3-2}$$

である．あるいは，両辺に分母の$\left(u^2+E^2\cos^2\theta\right)$ を掛けると，

$$\left(u^2+E^2\right)\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+2u\frac{\partial V}{\partial u}+\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial V}{\partial \theta}+\frac{u^2+E^2\cos^2\theta}{\left(u^2+E^2\right)\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}=0 \tag{3-3}$$

となる．V の解として，次式に示す変数分離形を仮定する．

$$V\left(u,\theta,\lambda\right)=f\left(u\right)g\left(\theta\right)h\left(\lambda\right) \tag{3-4}$$

式(3-3) に上式を代入すると，

$$\left(u^2+E^2\right)f''gh+2uf'gh+fg''h+\frac{1}{\tan\theta}fg'h+\frac{u^2+E^2\cos^2\theta}{\left(u^2+E^2\right)\sin^2\theta}fgh''=0 \tag{3-5}$$

となる．両辺を $V=fg\,h$ で割ると，

$$\begin{aligned}
&\left(u^2+E^2\right)\frac{f''}{f}+2u\frac{f'}{f}+\frac{g''}{g}+\frac{1}{\tan\theta}\frac{g'}{g}+\frac{u^2+E^2\cos^2\theta}{\left(u^2+E^2\right)\sin^2\theta}\frac{h''}{h}=0\\
&\therefore \frac{1}{f}\left(\left(u^2+E^2\right)f''+2uf'\right)+\frac{1}{g}\left(g''+\frac{1}{\tan\theta}g'\right)+\frac{u^2+E^2\cos^2\theta}{\left(u^2+E^2\right)\sin^2\theta}\frac{h''}{h}=0\\
&\therefore -\left(\frac{1}{f}\left(\left(u^2+E^2\right)f''+2uf'\right)+\frac{1}{g}\left(g''+\frac{1}{\tan\theta}g'\right)\right)=\frac{u^2+E^2\cos^2\theta}{\left(u^2+E^2\right)\sin^2\theta}\frac{h''}{h}\\
&\therefore -\frac{\left(u^2+E^2\right)\sin^2\theta}{u^2+E^2\cos^2\theta}\left(\frac{1}{f}\left(\left(u^2+E^2\right)f''+2uf'\right)+\frac{1}{g}\left(g''+\frac{1}{\tan\theta}g'\right)\right)=\frac{h''}{h}
\end{aligned} \tag{3-6}$$

となる．上式の左辺は変数 u と θ のみの関数，右辺は変数 λ のみの関数であり，変数 λ について，式(3-4) の変数分離の仮定が成立した．両辺は定数でなくてはならない．この定数を $-m^2$ とすれば，右辺については，

$$\frac{h''}{h} = -m^2$$
$$\therefore h'' + m^2 h = 0 \tag{3-7}$$

となる．式(3-6）の左辺の係数は，

$$\frac{u^2 + E^2 \cos^2\theta}{\left(u^2 + E^2\right)\sin^2\theta} = \frac{u^2 + E^2\left(1 - \sin^2\theta\right)}{\left(u^2 + E^2\right)\sin^2\theta} = \frac{u^2 + E^2}{\left(u^2 + E^2\right)\sin^2\theta} - \frac{E^2 \sin^2\theta}{\left(u^2 + E^2\right)\sin^2\theta}$$
$$= \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{E^2}{u^2 + E^2} \tag{3-8}$$

と変形できるから，式(3-6）の左辺については，

$$\frac{1}{f}\left(\left(u^2 + E^2\right) f'' + 2uf'\right) + \frac{1}{g}\left(g'' + \frac{1}{\tan\theta} g'\right) = m^2\left(\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{E^2}{u^2 + E^2}\right)$$
$$\frac{1}{f}\left(\left(u^2 + E^2\right) f'' + 2uf'\right) + \frac{E^2}{u^2 + E^2} m^2 = -\frac{1}{g}\left(g'' + \frac{1}{\tan\theta} g'\right) + \frac{m^2}{\sin^2\theta} \tag{3-9}$$

となる．左辺は変数 u のみの関数，右辺は変数 θ のみの関数であり，変数 u と変数 θ について式(3-4）の変数分離の仮定が成立した．両辺は定数でなくてはならない．この定数を n（n+1）とおくと，以下の 2 式が得られる．

$$\frac{1}{f}\left(\left(u^2 + E^2\right) f'' + 2uf'\right) + \frac{E^2}{u^2 + E^2} m^2 = n\left(n + 1\right)$$
$$\therefore \left(u^2 + E^2\right) f'' + 2uf' - \left(n\left(n + 1\right) - \frac{E^2}{u^2 + E^2} m^2\right) f = 0 \tag{3-10}$$

$$-\frac{1}{g}\left(g'' + \frac{1}{\tan\theta} g'\right) + \frac{m^2}{\sin^2\theta} = n\left(n + 1\right)$$
$$\therefore \sin\theta g'' + \cos\theta g' + \left(n\left(n + 1\right)\sin\theta - \frac{m^2}{\sin\theta}\right) g = 0 \tag{3-11}$$

式(3-7）と合わせて 3 個の常微分方程式となった．式(3-7）の h の常微分方程式は球座標系の場合の式(2-18）と同じである．また，式(3-11）の g の常微分方程式は球座標系の場合の式(2-17）と同じである．式(3-10）の f の常微分方程式は，変数 u を次式の変数 τ に変数変

換する．

$$\tau = i\frac{u}{E} \tag{3-12}$$

ここに，i は虚数単位（$i^2 = -1$）である．両辺を二乗すると，

$$\tau^2 = -\frac{u^2}{E^2} \tag{3-13}$$

である．また，式(3-12) の両辺を微分すると，

$$\begin{aligned} d\tau &= i\frac{du}{E} \\ \therefore \frac{d\tau}{du} &= \frac{i}{E} = -\frac{1}{iE} \end{aligned} \tag{3-14}$$

となる．したがって，f の 1 回微分と 2 回微分は,

$$\begin{aligned} f'(u) &= \frac{df}{du} = \frac{df}{d\tau}\frac{d\tau}{du} = \frac{i}{E}\frac{df}{d\tau} \\ f''(u) &= \frac{d^2 f}{du^2} = \frac{d}{du}\frac{dg}{du} = \frac{d}{du}\left(\frac{i}{E}\frac{df}{d\tau}\right) \\ &= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{d\tau}{du}\left(\frac{i}{E}\frac{df}{d\tau}\right)\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{i}{E}\left(\frac{i}{E}\frac{df}{d\tau}\right)\right) = -\frac{1}{E^2}\frac{d^2 f}{d\tau^2} \end{aligned} \tag{3-15}$$

となる．式(3-10) に上式を代入すると,

$$\begin{aligned} &\left(u^2 + E^2\right)\frac{-1}{E^2}\frac{d^2 f}{d\tau^2} + 2u\frac{i}{E}\frac{df}{d\tau} - \left(n\left(n+1\right) - \frac{E^2}{u^2 + E^2}m^2\right)f = 0 \\ &\therefore \left(\frac{u^2}{E^2} + 1\right)\frac{d^2 f}{d\tau^2} - \frac{2ui}{E}\frac{df}{d\tau} + \left(n\left(n+1\right) - \frac{m^2}{u^2/E^2 + 1}\right)f = 0 \\ &\therefore \left(1 - \tau^2\right)\frac{d^2 f}{d\tau^2} - 2\tau\frac{df}{d\tau} + \left(n\left(n+1\right) - \frac{m^2}{1 - \tau^2}\right)f = 0 \end{aligned} \tag{3-16}$$

となり，g の微分方程式と同様に，ルジャンドルの陪微分方程式となった．以上より，楕円体座標系における調和関数（ラプラス方程式(3-2)の解）は，

$$V(r,\theta,\lambda)=\begin{Bmatrix} P_{nm}\left(i\dfrac{u}{E}\right) \\ Q_{nm}\left(i\dfrac{u}{E}\right) \end{Bmatrix} P_{nm}(\cos\theta)\begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} \tag{3-17}$$

と導かれた. 球座標系における調和関数の式(2-24）と比較して, 右辺の第 1 項のみ異なる. ここに，記号{ }は，2 個のうちどちらかを選ぶことを示す．一般解は，a_{nm}, b_{nm} を任意の定数として，

$$\begin{aligned} V(u,\theta,\lambda)&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{P_{nm}\left(i\dfrac{u}{E}\right)}{P_{nm}\left(i\dfrac{b}{E}\right)}\left(a_{nm}P_{nm}(\cos\theta)\cos(m\lambda)+b_{nm}P_{nm}(\cos\theta)\sin(m\lambda)\right) \\ V(u,\theta,\lambda)&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{Q_{nm}\left(i\dfrac{u}{E}\right)}{Q_{nm}\left(i\dfrac{b}{E}\right)}\left(a_{nm}P_{nm}(\cos\theta)\cos(m\lambda)+b_{nm}P_{nm}(\cos\theta)\sin(m\lambda)\right) \end{aligned} \tag{3-18}$$

と表せる．右辺の分母の $P_{nm}\left(i\dfrac{b}{E}\right)$, $Q_{nm}\left(i\dfrac{b}{E}\right)$ は，式を簡単にするため（値を実数にするため）に導入した定数である．定数 a_{nm}, b_{nm} は境界条件から決まる．ここで，楕円体が球に近づいていくときを考える. 球の半径を R として $a,b\to R$ となるから，$E\to 0$ となり，$u\to r$ となる．ルジャンドル陪関数は $x\to\infty$ において次式のように表される．

$$\begin{aligned} P_{nm}(x)&=\frac{(2n-1)!!}{(n-m)!}\cdot x^{n}+O\left(x^{n-2}\right) \\ Q_{nm}(x)&=(-1)^{m}\frac{(n+m)!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{1}{x^{n+1}}+O\left(x^{-n-3}\right) \end{aligned} \tag{3-19}$$

すなわち，P_{nm} は n 次式に近づき，Q_{nm} は-(n+1)次式に近づく．上式を使うと，(3-18）の変数 u の項は，

$$
\begin{aligned}
&\frac{P_{nm}\left(i\dfrac{u}{E}\right)}{P_{nm}\left(i\dfrac{b}{E}\right)} \to \frac{\left(i\dfrac{r}{E}\right)^{n}}{\left(i\dfrac{R}{E}\right)^{n}} = \left(\frac{r}{R}\right)^{n} \\
&\frac{Q_{nm}\left(i\dfrac{u}{E}\right)}{Q_{nm}\left(i\dfrac{b}{E}\right)} \to \frac{\left(i\dfrac{r}{E}\right)^{-n-1}}{\left(i\dfrac{R}{E}\right)^{-n-1}} = \left(\frac{r}{R}\right)^{-n-1} = \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}
\end{aligned}
\tag{3-20}
$$

となり，（定数係数 R を除いて）球座標系の調和関数の式(2-26）と一致する．

参考文献

1) TB006，一般座標系のラプラス方程式

2) TB007，くわしいルジャンドル関数

3) TB008，くわしいルジャンドル陪関数

4) B. Hofmann-Wellenhof, H. Moritz, Physical Geodesy, 2nd Edition, Springer, 2006（B. ホフマン-ウェレンホフ／H. モーリッツ，西修二郎訳，物理測地学，丸善出版，2012）