くわしい ルジャンドル関数

1. ルジャンドル微分方程式とルジャンドル関数

次式に示す２次の常微分方程式をルジャンドル微分方程式（Legendre differential equation）と言う．物理学の多くの問題，特に球に関する境界値問題に現れる．ルジャンドル（Adrien Marie Legendre）はフランスの数学者（1752-1833）である．本書における変数 x は実数，媒介変数 n は整数とする．

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\frac{df_n(x)}{dx}\right)+n(n+1)f_n(x)=0 \tag{1-1}$$

左辺の中の微分を進めると，

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2 f_n(x)}{dx^2}-2x\frac{df_n(x)}{dx}+n(n+1)f_n(x)=0 \tag{1-2}$$

とも表される．この微分方程式には独立した二種類の解が存在する．一つは記号 $P_n(x)$ で表される第１種ルジャンドル関数（Legendre function of the first kind）であり，もう一つは記号 $Q_n(x)$ で表される第２種ルジャンドル関数（Legendre function of the second kind）である．ルジャンドル微分方程式の一般解は，$P_n(x)$ と $Q_n(x)$ を用いて次式のように表される．c_1, c_2 は任意の定数である．符号を変えた $-P_n(x), -Q_n(x)$ もルジャンドル微分方程式の解である．

$$f_n(x)=c_1P_n(x)+c_2Q_n(x) \tag{1-3}$$

以下，$P_n(x)$ と $Q_n(x)$ を具体的に求める方法をそれぞれ三通りずつ記す．

2. 第１種ルジャンドル関数

2.1 微分して計算する方法

$P_n(x)$ は次式の微分計算から求めることができる．

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n \tag{1-4}$$

この式はロドリーグの公式と呼ばれる．ロドリーグ（Olinde Rodrigues）はフランスの数学者（1795-1851）である．左辺の多項式$\left(x^2-1\right)^n$ は$2n$次であり，それをn回微分するからn次式となる．上式を使って$n=0,1,2,3$ の$P_n\left(x\right)$ を計算すると，

$$P_0\left(x\right)=\frac{1}{2^0 0!}\frac{d^0}{dx^0}\left(x^2-1\right)^0=1 \tag{1-5}$$

$$P_1\left(x\right)=\frac{1}{2^1 1!}\frac{d^1}{dx^1}\left(x^2-1\right)^1=\frac{1}{2\cdot 1}\cdot 2x=x \tag{1-6}$$

$$\begin{aligned}P_2\left(x\right)&=\frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2-1\right)^2=\frac{1}{4\cdot 2}\cdot\frac{d}{dx}2\left(x^2-1\right)\cdot 2x\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}\left(x^3-x\right)=\frac{3x^2-1}{2}\end{aligned} \tag{1-7}$$

$$\begin{aligned}P_3\left(x\right)&=\frac{1}{2^3 3!}\frac{d^3}{dx^3}\left(x^2-1\right)^3=\frac{1}{8\cdot 6}\cdot\frac{d^2}{dx^2}3\left(x^2-1\right)^2\cdot 2x\\&=\frac{1}{8}\cdot\frac{d^2}{dx^2}\left(x^5-2x^3+x\right)=\frac{1}{8}\cdot\frac{d}{dx}\left(5x^4-6x^2+1\right)\\&=\frac{20x^3-12x}{8}=\frac{5x^3-3x}{2}\end{aligned} \tag{1-8}$$

となる．

2.2 漸化式から計算する方法

$n=0,1$ の$P_n\left(x\right)$を初期値として，次式の漸化式を使って計算することもできる．

$$P_{n+1}\left(x\right)=\frac{2n+1}{n+1}xP_n\left(x\right)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}\left(x\right) \tag{1-9}$$

上式を使って$n=2,3$ の$P_n\left(x\right)$ を計算すると，

$$P_2\left(x\right)=\frac{2\cdot 1+1}{1+1}xP_1\left(x\right)-\frac{1}{1+1}P_0\left(x\right)=\frac{3}{2}x\cdot x-\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{3x^2-1}{2} \tag{1-10}$$

$$\begin{aligned}P_3\left(x\right)&=\frac{2\cdot 2+1}{2+1}xP_2\left(x\right)-\frac{2}{2+1}P_1\left(x\right)=\frac{5}{3}x\cdot\frac{3x^2-1}{2}-\frac{2}{3}x\\&=\frac{15x^3-5x-4x}{6}=\frac{15x^3-9x}{6}=\frac{5x^3-3x}{2}\end{aligned} \tag{1-11}$$

となる．

2.3 直接計算する方法

微分計算や漸化式計算に依らず，次式を使って直接求めることもできる．

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\mathrm{int}[n/2]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k} \tag{1-12}$$

ここに，$\mathrm{int}[n/2]$ は $n/2$ 以下の最大の整数である．上式を使って $n=0,1,2,3$ の $P_n(x)$ を計算すると，

$$\begin{aligned}P_0(x)&=\frac{1}{2^0}\sum_{k=0}^{0}(-1)^k\frac{(2\cdot 0-2k)!}{k!(0-k)!(0-2k)!}x^{0-2k}\\&=\frac{1}{1}(-1)^0\frac{0!}{0!0!0!}x^0=\frac{1}{1}\cdot 1\cdot\frac{1}{1\cdot 1\cdot 1}\cdot 1=1\end{aligned} \tag{1-13}$$

$$\begin{aligned}P_1(x)&=\frac{1}{2^1}\sum_{k=0}^{0}(-1)^k\frac{(2\cdot 1-2k)!}{k!(1-k)!(1-2k)!}x^{1-2k}\\&=\frac{1}{2}(-1)^0\frac{2!}{0!1!1!}x^1=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{1\cdot 1\cdot 1}x=x\end{aligned} \tag{1-14}$$

$$\begin{aligned}P_2(x)&=\frac{1}{2^2}\sum_{k=0}^{1}(-1)^k\frac{(2\cdot 2-2k)!}{k!(2-k)!(2-2k)!}x^{2-2k}\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{24}{1\cdot 2\cdot 2}x^2-\frac{2}{1\cdot 1\cdot 1}x^0\right)=\frac{1}{4}\left(6x^2-2\right)=\frac{3x^2-1}{2}\end{aligned} \tag{1-15}$$

$$\begin{aligned}P_3(x)&=\frac{1}{2^3}\sum_{k=0}^{1}(-1)^k\frac{(2\cdot 3-2k)!}{k!(3-k)!(3-2k)!}x^{3-2k}\\&=\frac{1}{8}\left(\frac{6!}{0!3!3!}x^3-\frac{4!}{1!2!1!}x^1\right)=\frac{1}{8}\left(20x^3-12x\right)=\frac{5x^3-3x}{2}\end{aligned} \tag{1-16}$$

となる．

2.4 第 1 種ルジャンドル関数のまとめ

$n=5$ までの $P_n(x)$ を下表に示す．

$$P_0(x)=1$$
$$P_1(x)=x$$
$$P_2(x)=\frac{3x^2-1}{2}$$
$$P_3(x)=\frac{5x^3-3x}{2}$$
$$P_4(x)=\frac{35x^4-30x^2+3}{8}$$
$$P_5(x)=\frac{63x^5-70x^3+15x}{8}$$

表 1　第 1 種ルジャンドル関数 $P_n(x)$

$P_n(x)$ は多項式であるから，ルジャンドル多項式（Legendre polynomial）とも呼ばれる．$|x|\le 1$ における $P_n(x)$ を下図に示す．n が偶数の場合は偶関数であり，奇数の場合は奇関数である．偶関数とは $f(-x)=f(x)$ となる関数であり，グラフは線対称となる．奇関数とは $f(-x)=-f(x)$ となる関数であり，グラフは点対称となる．

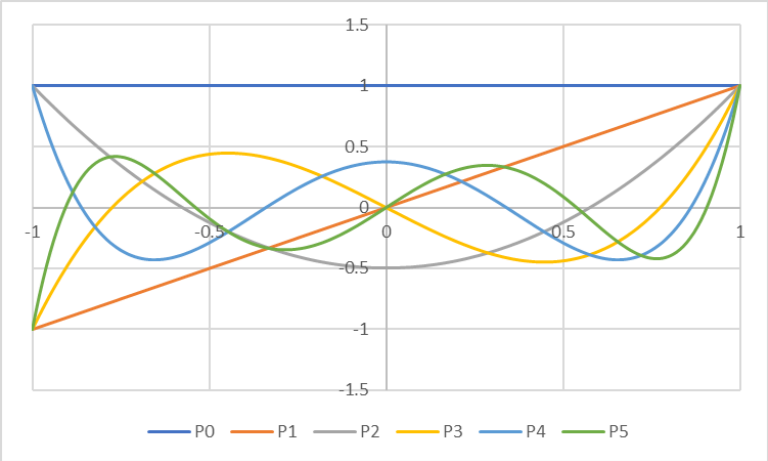

図 1　第 1 種ルジャンドル関数 $P_n(x)$　$|x|\le 1$

$P_n(x)$ は連続関数であり，$|x|\ge 1$ においても表 1 と同じである．$|x|\le 2$ における $P_n(x)$ を下図に示す．

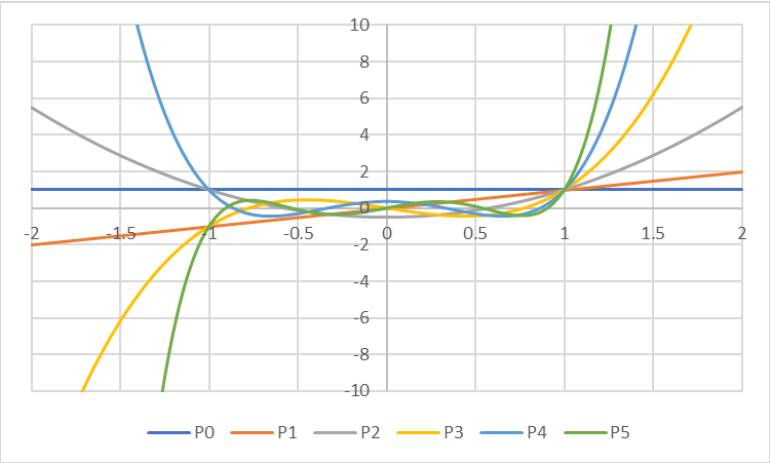

図 2　第 1 種ルジャンドル関数 $P_n(x)$　$|x| \le 2$

$1 \le x \le 10$　の $P_n(x)$　を対数目盛でプロットすると下図のようになる．0 次の $P_0(x)=1$　を除き，$P_n(x)$　の絶対値は単調増加して，$|x| \to \infty$　では無限大となる．

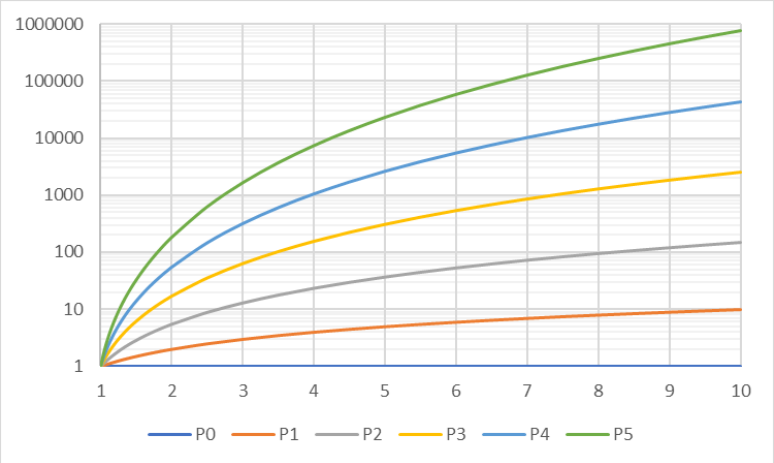

図 3　第 1 種ルジャンドル関数 $P_n(x)$　$1 \le x \le 10$

$|x| >> 1$　の場合，$P_n(x)$ は次式のように表され，n 次式に近づく．

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{n!} x^n + O\left(x^{n-2}\right) \tag{1-17}$$

ここに，$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1$　であり，$0! = 1$，$(-1)!! = 1$　とする．$O\left(x^{n-2}\right)$ は最高次が $(n-2)$ 次のなんらかの関数であり，0 に漸近はしないが，第 1 項と比較すると 2 次小さい．具体的には，

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= \frac{3x^2}{2} + O\left(x^0\right) \\
P_3(x) &= \frac{5x^3}{2} + O\left(x^1\right) \\
P_4(x) &= \frac{35x^4}{8} + O\left(x^2\right) \\
P_5(x) &= \frac{63x^5}{8} + O\left(x^3\right)
\end{aligned}
\tag{1-18}
$$

となる.

2.5 第 1 種ルジャンドル関数の証明

$n = 0, 1, 2, 3$ の $P_n(x)$ をルジャンドル微分方程式の式(1-2) に実際に代入する.

$P_0(x) = 1$ の証明

$$
\begin{aligned}
&\left(1 - x^2\right)\frac{d^2 P_0(x)}{dx^2} - 2x\frac{dP_0(x)}{dx} + 0 \cdot 1 \cdot P_0(x) \\
&\quad = \left(1 - x^2\right) \cdot 0 - 2x \cdot 0 + 0 = 0
\end{aligned}
\tag{A1}
$$

$P_1(x) = x$ の証明

$$
\begin{aligned}
&\left(1 - x^2\right)\frac{d^2 P_1(x)}{dx^2} - 2x\frac{dP_1(x)}{dx} + 2P_1(x) \\
&\quad = \left(1 - x^2\right) \cdot 0 - 2x \cdot 1 + 2x \\
&\quad = 0 - 2x + 2x = 0
\end{aligned}
\tag{A2}
$$

$P_2(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{2}$ の証明

$$
\begin{aligned}
&\left(1 - x^2\right)\frac{d^2 P_2(x)}{dx^2} - 2x\frac{dP_2(x)}{dx} + 6P_2(x) \\
&\quad = \left(1 - x^2\right) \cdot 3 - 2x \cdot 3x + 6 \cdot \frac{3x^2 - 1}{2} \\
&\quad = 3 - 3x^2 - 6x^2 + 9x^2 - 3 = 0
\end{aligned}
\tag{A3}
$$

$P_3(x) = \dfrac{5x^3 - 3x}{2}$ の証明

$$
\begin{aligned}
&\left(1-x^2\right)\frac{d^2P_3(x)}{dx^2}-2x\frac{dP_3(x)}{dx}+12P_3(x)\\
&=\left(1-x^2\right)\cdot 15x-2x\cdot\frac{15x^2-3}{2}+12\cdot\frac{5x^3-3x}{2}\\
&=15x-15x^3-15x^3+3x+30x^2-18x=0
\end{aligned}
\tag{A4}
$$

確かにルジャンドル微分方程式を満足している．

3. 第 2 種ルジャンドル関数

3.1 微分して計算する方法

$Q_n(x)$ は次式の微分計算で求めることができる．変数が $|x|<1$ の場合と $|x|>1$ の場合とで場合分けされる．対数関数 ln の変数は正でなくてはならないためである．

$$
Q_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(\left(x^2-1\right)^n\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)-\frac{1}{2}P_n(x)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\quad |x|<1 \tag{2-1}
$$

$$
Q_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(\left(x^2-1\right)^n\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)-\frac{1}{2}P_n(x)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right),\quad |x|>1 \tag{2-2}
$$

上式の対数関数の項は,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)&=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots=\tanh^{-1}x\\
\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)&=\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{7x^7}+\cdots=\coth^{-1}x
\end{aligned}
\tag{2-3}
$$

と級数展開でき，いずれも奇関数である．

式(2-1）を使って $|x|<1,\quad n=0,1,2,3$ の $Q_n(x)$ を計算すると,

$$
\begin{aligned}
Q_0(x)&=\frac{1}{2^0 0!}\frac{d^0}{dx^0}\left(\left(x^2-1\right)^0\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)-\frac{1}{2}P_0(x)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\\
&=\frac{1}{1\cdot 1}\cdot 1\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)
\end{aligned}
\tag{2-4}
$$

$$\frac{d^1}{dx^1}\left(\left(x^2-1\right)^1\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)=2x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\left(x^2-1\right)\cdot\frac{2}{1-x^2}$$
$$=2x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-2$$

$$Q_1(x)=\frac{1}{2^1 1!}\frac{d^1}{dx^1}\left(\left(x^2-1\right)^1\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)-\frac{1}{2}P_1(x)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
$$=\frac{1}{2\cdot 1}\left(2x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-2\right)-\frac{1}{2}x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-1 \tag{2-5}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\left(x^2-1\right)^2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)=\frac{d}{dx}\left(2\left(x^2-1\right)\cdot 2x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\left(x^2-1\right)^2\cdot\frac{2}{1-x^2}\right)$$
$$=\frac{d}{dx}\left(\left(4x^3-4x\right)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-2\left(x^2-1\right)\right)$$
$$=\left(12x^2-4\right)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\left(4x^3-4x\right)\cdot\frac{2}{1-x^2}-4x$$
$$=\left(12x^2-4\right)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-8x-4x=\left(12x^2-4\right)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-12x$$

$$Q_2(x)=\frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dx^2}\left(\left(x^2-1\right)^2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)-\frac{1}{2}P_2(x)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
$$=\frac{1}{4\cdot 2}\left(\left(12x^2-4\right)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-12x\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{3x^2-1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
$$=\left(\frac{3x^2-1}{2}-\frac{3x^2-1}{4}\right)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{3x}{2}=\frac{3x^2-1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{3x}{2} \tag{2-6}$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\left(\left(x^2-1\right)^3\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)=\frac{d^2}{dx^2}\left(3\left(x^2-1\right)^2\cdot 2x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\left(x^2-1\right)^3\cdot\frac{2}{1-x^2}\right)$$
$$=\frac{d^2}{dx^2}\left(\left(6x^5-12x^3+6x\right)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-2\left(x^2-1\right)^2\right)$$
$$=\frac{d}{dx}\left(\left(30x^4-36x^2+6\right)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\left(6x^5-12x^3+6x\right)\cdot\frac{2}{1-x^2}-4\left(x^2-1\right)\cdot 2x\right)$$
$$=\frac{d}{dx}\left(\left(30x^4-36x^2+6\right)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+2\left(-6x^3+6x\right)-\left(8x^3-8x\right)\right)$$
$$=\frac{d}{dx}\left(\left(30x^4-36x^2+6\right)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-20x^3+20x\right)$$
$$=\left(120x^3-72x\right)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\left(30x^4-36x^2+6\right)\cdot\frac{2}{1-x^2}-60x^2+20$$
$$=\left(120x^3-72x\right)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+2\left(-30x^2+6\right)-60x^2+20$$
$$=\left(120x^3-72x\right)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-120x^2+32$$

$$Q_3(x)=\frac{1}{2^3 3!}\frac{d^3}{dx^3}\left(\left(x^2-1\right)^3\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)-\frac{1}{2}P_3(x)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
$$=\frac{1}{8\cdot 6}\left(\left(120x^3-72x\right)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-120x^2+32\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{5x^3-3x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
$$=\left(\frac{10x^3-6x}{4}-\frac{5x^3-3x}{4}\right)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{120x^2-32}{48}$$
$$=\frac{5x^3-3x}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{15x^2-4}{6} \tag{2-7}$$

となる．同様に，式(2-2）を使って$|x|>1,\quad n=0,1,2,3$ の$Q_n(x)$ を計算すると，

$$Q_0(x)=\frac{1}{2^0 0!}\frac{d^0}{dx^0}\left(\left(x^2-1\right)^0\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)-\frac{1}{2}P_0(x)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$
$$=\frac{1}{1\cdot 1}\cdot 1\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \tag{2-8}$$

$$\frac{d^1}{dx^1}\left(\left(x^2-1\right)^1\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)=2x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\left(x^2-1\right)\cdot\frac{-2}{x^2-1}$$
$$=2x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-2$$

$$
\begin{aligned}
Q_1(x) &= \frac{1}{2^1 1!}\frac{d^1}{dx^1}\left(\left(x^2-1\right)^1 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right) - \frac{1}{2}P_1(x)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \\
&= \frac{1}{2\cdot 1}\left(2x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-2\right) - \frac{1}{2}x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \\
&= \frac{1}{2}x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-1
\end{aligned}
\tag{2-9}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}\left(\left(x^2-1\right)^2 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right) &= \frac{d}{dx}\left(2\left(x^2-1\right)\cdot 2x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\left(x^2-1\right)^2\cdot\frac{-2}{x^2-1}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\left(4x^3-4x\right)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-2\left(x^2-1\right)\right) \\
&= \left(12x^2-4\right)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\left(4x^3-4x\right)\cdot\frac{-2}{x^2-1}-4x \\
&= \left(12x^2-4\right)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-8x-4x = \left(12x^2-4\right)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-12x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_2(x) &= \frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dx^2}\left(\left(x^2-1\right)^2 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right) - \frac{1}{2}P_2(x)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \\
&= \frac{1}{4\cdot 2}\left(\left(12x^2-4\right)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-12x\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{3x^2-1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \\
&= \left(\frac{3x^2-1}{2}-\frac{3x^2-1}{4}\right)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-\frac{3x}{2} = \frac{3x^2-1}{4}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-\frac{3x}{2}
\end{aligned}
\tag{2-10}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d^3}{dx^3}\left(\left(x^2-1\right)^3\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right) &= \frac{d^2}{dx^2}\left(3\left(x^2-1\right)^2\cdot 2x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\left(x^2-1\right)^3\cdot\frac{-2}{x^2-1}\right)\\
&= \frac{d^2}{dx^2}\left(\left(6x^5-12x^3+6x\right)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-2\left(x^2-1\right)^2\right)\\
&= \frac{d}{dx}\left(\left(30x^4-36x^2+6\right)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\left(6x^5-12x^3+6x\right)\cdot\frac{-2}{x^2-1}-4\left(x^2-1\right)\cdot 2x\right)\\
&= \frac{d}{dx}\left(\left(30x^4-36x^2+6\right)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-2\left(6x^3-6x\right)-\left(8x^3-8x\right)\right)\\
&= \frac{d}{dx}\left(\left(30x^4-36x^2+6\right)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-20x^3+20x\right)\\
&= \left(120x^3-72x\right)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\left(30x^4-36x^2+6\right)\cdot\frac{-2}{x^2-1}-60x^2+20\\
&= \left(120x^3-72x\right)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-2\left(30x^2-6\right)-60x^2+20\\
&= \left(120x^3-72x\right)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-120x^2+32
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_3(x) &= \frac{1}{2^3 3!}\frac{d^3}{dx^3}\left(\left(x^2-1\right)^3\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)-\frac{1}{2}P_3(x)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\\
&= \frac{1}{8\cdot 6}\left(\left(120x^3-72x\right)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-120x^2+32\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{5x^3-3x}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\\
&= \left(\frac{10x^3-6x}{4}-\frac{5x^3-3x}{4}\right)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-\frac{120x^2-32}{48}\\
&= \frac{5x^3-3x}{4}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-\frac{15x^2-4}{6}
\end{aligned}
\tag{2-11}
$$

となる．

3.2 漸化式から計算する方法

$Q_n(x)$ は次式の漸化式を使って計算することもできる． $P_n(x)$ の漸化式(1-8) と同形である．

$$
Q_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}xQ_n(x)-\frac{n}{n+1}Q_{n-1}(x) \tag{2-12}
$$

$|x|<1$ において， $n=0,1$ を初期値として $n=2,3$ の $Q_n(x)$ を計算すると，

$$
\begin{aligned}
Q_2(x) &= \frac{2\cdot 1+1}{1+1}xQ_1(x)-\frac{1}{1+1}Q_0(x) \\
&= \frac{3}{2}x\cdot\left(\frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-1\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\
&= \frac{3x^2-1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{3x}{2}
\end{aligned}
\tag{2-13}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_3(x) &= \frac{2\cdot 2+1}{2+1}xQ_2(x)-\frac{2}{2+1}Q_1(x) \\
&= \frac{5}{3}x\left(\frac{3x^2-1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{3x}{2}\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-1\right) \\
&= \frac{15x^3-5x-4x}{12}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{5x^2}{2}+\frac{2}{3} \\
&= \frac{5x^3-3x}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{15x^2-4}{6}
\end{aligned}
\tag{2-14}
$$

となる．$|x|>1$ の場合も同様であり，$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ を $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ に置き換えた式となる．

3.3 第 1 種ルジャンドル関数から計算する方法

$Q_n(x)$ は，微分計算や漸化式計算に依らず，$P_n(x)$ を使って直接求めることもできる．

$$
Q_n(x)=\frac{1}{2}P_n(x)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}P_{k-1}(x)P_{n-k}(x),\quad |x|<1 \tag{2-15}
$$

$$
Q_n(x)=\frac{1}{2}P_n(x)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}P_{k-1}(x)P_{n-k}(x),\quad |x|>1 \tag{2-16}
$$

式(2-15）を使って $|x|<1,\quad n=0,1,2,3$ の $Q_n(x)$ を計算すると，

$$
Q_0(x)=\frac{1}{2}P_0(x)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \tag{2-17}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_1(x) &= \frac{1}{2}P_1(x)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-P_0(x)P_0(x) \\
&= \frac{1}{2}x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-1\cdot 1=\frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-1
\end{aligned}
\tag{2-18}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_2(x) &= \frac{1}{2}P_2(x)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{1}{1}P_0(x)P_1(x)-\frac{1}{2}P_1(x)P_0(x) \\
&= \frac{1}{2}P_2(x)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{3}{2}P_0(x)P_1(x) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{3x^2-1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{3}{2}\cdot 1\cdot x \\
&= \frac{3x^2-1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{3x}{2}
\end{aligned}
\tag{2-19}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_3(x) &= \frac{1}{2}P_3(x)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{1}{1}P_0(x)P_2(x)-\frac{1}{2}P_1(x)P_1(x)-\frac{1}{3}P_2(x)P_0(x) \\
&= \frac{1}{2}P_3(x)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{4}{3}P_0(x)P_1(x)-\frac{1}{2}P_1^2(x) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{5x^3-3x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{4}{3}\cdot 1\cdot\frac{3x^2-1}{2}-\frac{1}{2}\cdot x^2 \\
&= \frac{5x^3-3x}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\left(2+\frac{1}{2}\right)x^2+\frac{2}{3} \\
&= \frac{5x^3-3x}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{5}{2}x^2+\frac{2}{3} \\
&= \frac{5x^3-3x}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{15x^2-4}{6}
\end{aligned}
\tag{2-20}
$$

となる．$|x|>1$ の場合は，$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ を $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ に置き換えた式となる．

3.4 第 2 種ルジャンドル関数のまとめ

$n=5$ までの $Q_n(x)$ を下表に示す．$P_n(x)$ とは異なり，$Q_n(x)$ は多項式ではない．

$$
\begin{aligned}
&Q_0(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\quad |x|<1, \qquad Q_0(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right),\quad |x|>1 \\
&Q_1(x)=xQ_0(x)-1 \\
&Q_2(x)=\frac{3x^2-1}{2}Q_0(x)-\frac{3x}{2} \\
&Q_3(x)=\frac{5x^3-3x}{2}Q_0(x)-\frac{15x^2-4}{6} \\
&Q_4(x)=\frac{35x^4-30x^2+3}{8}Q_0(x)-\frac{105x^3-55x}{24} \\
&Q_5(x)=\frac{63x^5-70x^3+15x}{8}Q_0(x)-\frac{945x^4-735x^2+64}{120}
\end{aligned}
$$

表 2　第 2 種のルジャンドル関数 $Q_n(x)$

$Q_n(x)$ は次式のように表すこともできる．

$$Q_n(x) = P_n(x)Q_0(x) - W_{n-1}(x) \tag{2-21}$$

ここに，$W_n(x)$ は次式の n 次式である．

$$\begin{aligned}
W_{-1}(x) &= 0 \\
W_0(x) &= 1 \\
W_1(x) &= \frac{3x}{2} \\
W_2(x) &= \frac{15x^2 - 4}{6} \\
W_3(x) &= \frac{105x^3 - 55x}{24} \\
W_4(x) &= \frac{945x^4 - 735x^2 + 64}{120}
\end{aligned} \tag{2-22}$$

この多項式 $W_n(x)$ は次式の微分方程式を満足している．

$$\left(1 - x^2\right)\frac{d^2}{dx^2}W_{n-1}(x) - 2x\frac{d}{dx}W_{n-1}(x) + n(n+1)W_{n-1}(x) = 2\frac{d}{dx}P_n(x) \tag{2-23}$$

$|x| < 1$ における $Q_n(x)$ を下図に示す．n が偶数の場合は奇関数であり，奇数の場合は偶関数である．$x \to \pm 1$ では正または負の無限大となり，$x = \pm 1$ は特異点である．

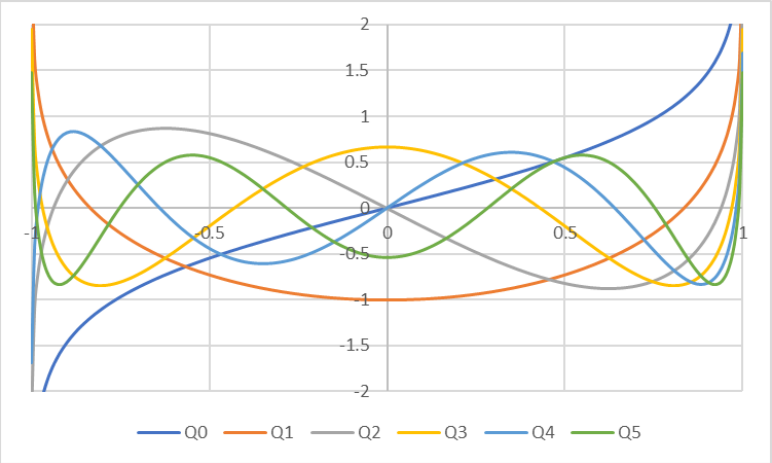

図 4　第 2 種のルジャンドル関数 $Q_n(x)$　$|x| < 1$

上図の $|x|>1$ の範囲を含む $|x|\le 2$ における $Q_n(x)$ を下図に示す．

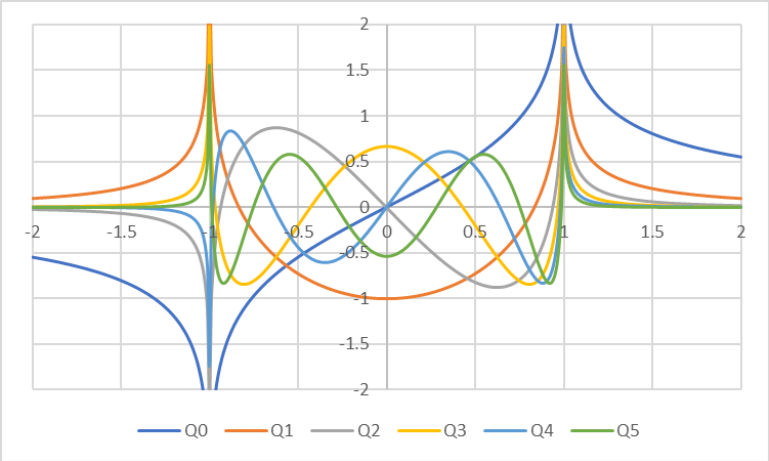

図 5　第 2 種のルジャンドル関数 $Q_n(x)$　$|x|\le 2$

$1<x\le 10$ の $Q_n(x)$ を対数目盛でプロットすると下図のようになる．$Q_n(x)$ の絶対値は単調減少して，$|x|\to\infty$ では 0 に収束する．

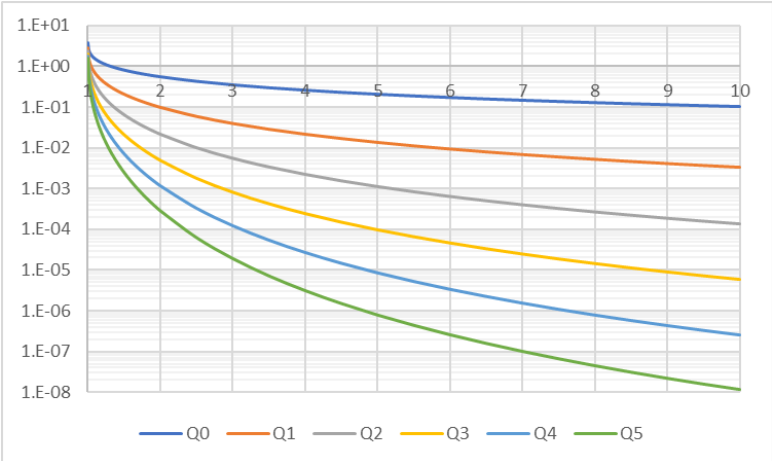

図 6　第 2 種のルジャンドル関数 $Q_n(x)$　$x>1$

$|x|>>1$ の場合，$Q_n(x)$ は次式のように表され，$-(n+1)$ 次式に近づき，0 に漸近する．

$$Q_n(x)=\frac{n!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{1}{x^{n+1}}+O\left(x^{-n-3}\right) \tag{2-24}$$

ここに，$(2n+1)!!=(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1$ である．$O\left(x^{-n-3}\right)$ は最高次が $(-n-3)$ 次の

関数であり，第 1 項と比較すると 2 次小さい．具体的には，

$$
\begin{aligned}
Q_0(x) &= \frac{1}{x} + O\left(x^{-3}\right) \\
Q_1(x) &= \frac{1}{3x^2} + O\left(x^{-4}\right) \\
Q_2(x) &= \frac{2}{15x^3} + O\left(x^{-5}\right) \\
Q_3(x) &= \frac{2}{35x^4} + O\left(x^{-6}\right) \\
Q_4(x) &= \frac{8}{315x^5} + O\left(x^{-7}\right) \\
Q_5(x) &= \frac{8}{693x^6} + O\left(x^{-8}\right)
\end{aligned}
\tag{2-25}
$$

となる．

3.5 第 2 種ルジャンドル関数の証明

$|x|<1,\quad n=0,1,2,3$ の $Q_n(x)$ をルジャンドル微分方程式の式(1-2) に代入する．微分計算の途中は省略する．

$Q_0(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ の証明

$$
\begin{aligned}
&\frac{dQ_0(x)}{dx} = \frac{1}{1-x^2} \\
&\frac{d^2Q_0(x)}{dx^2} = \frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2} \\
&\left(1-x^2\right)\frac{d^2Q_0(x)}{dx^2} - 2x\frac{dQ_0(x)}{dx} \\
&\quad = \left(1-x^2\right)\frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2} - 2x\frac{1}{1-x^2} = \frac{2x-2x}{1-x^2} = 0
\end{aligned}
\tag{B1}
$$

$Q_1(x)=\frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-1$ の証明

$$
\frac{dQ_1(x)}{dx} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{x}{1-x^2}
$$

$$\frac{d^2Q_1(x)}{dx^2}=\frac{2}{\left(1-x^2\right)^2}$$

$$\begin{aligned}
&\left(1-x^2\right)\frac{d^2Q_1(x)}{dx^2}-2x\frac{dQ_1(x)}{dx}+2Q_1(x)\\
&=\left(1-x^2\right)\cdot\frac{2}{\left(1-x^2\right)^2}-2x\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\frac{x}{1-x^2}\right)+2\left(\frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-1\right)\\
&=\frac{2}{1-x^2}-x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{2x^2}{1-x^2}+x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-2\\
&=(-x+x)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\frac{2-2x^2}{1-x^2}-2=0
\end{aligned}\tag{B2}$$

$Q_2(x)=\dfrac{3x^2-1}{4}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)-\dfrac{3x}{2}$ の証明

$$\frac{dQ_2(x)}{dx}=\frac{3x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\frac{3x^2-2}{1-x^2}$$

$$\frac{d^2Q_2(x)}{dx^2}=\frac{3}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\frac{5x-3x^3}{\left(1-x^2\right)^2}$$

$$\begin{aligned}
&\left(1-x^2\right)\frac{d^2Q_2(x)}{dx^2}-2x\frac{dQ_2(x)}{dx}+6Q_2(x)\\
&=\left(1-x^2\right)\left(\frac{3}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\frac{5x-3x^3}{\left(1-x^2\right)^2}\right)\\
&\quad-2x\left(\frac{3x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\frac{3x^2-2}{1-x^2}\right)+6\left(\frac{3x^2-1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{3x}{2}\right)\\
&=\left(\frac{3-3x^2}{2}-3x^2+\frac{9x^2-3}{2}\right)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\frac{5x-3x^3}{1-x^2}+\frac{-6x^3+4x}{1-x^2}+9x\\
&=0\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\frac{9x-9x^3}{1-x^2}-9x=0
\end{aligned}\tag{B3}$$

$Q_3(x)=\dfrac{5x^3-3x}{4}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)-\dfrac{15x^2-4}{6}$ の証明

$$\frac{dQ_3(x)}{dx}=\frac{15x^2-3}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\frac{15x^3-13x}{2\left(1-x^2\right)}$$

$$\frac{d^2Q_3(x)}{dx^2}=\frac{15x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\frac{-15x^4+25x^2-8}{\left(1-x^2\right)^2}$$

$$\begin{aligned}
&\left(1-x^2\right)\frac{d^2Q_3(x)}{dx^2}-2x\frac{dQ_3(x)}{dx}+12Q_3(x)\\
&=\left(1-x^2\right)\left(\frac{15x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\frac{-15x^4+25x^2-8}{\left(1-x^2\right)^2}\right)\\
&\quad-2x\left(\frac{15x^2-3}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\frac{15x^3-13x}{2\left(1-x^2\right)}\right)+12\left(\frac{5x^3-3x}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{15x^2-4}{6}\right)\\
&=\left(\frac{15x-15x^3}{2}-\frac{15x^3-3x}{2}+15x^3-9x\right)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\\
&\quad+\frac{-15x^4+25x^2-8}{1-x^2}-\frac{15x^4-13x^2}{1-x^2}-2\left(15x^2-4\right)\\
&=\frac{-30x^4+38x^2-8}{1-x^2}-30x^2+8=\frac{\left(1-x^2\right)\left(-8+30x^2\right)}{1-x^2}-30x^2+8=0
\end{aligned}\tag{B4}$$

確かにルジャンドル微分方程式を満足している．同様に，$|x|>1,\quad n=0,1,2,3$ の $Q_n(x)$ もルジャンドル微分方程式を満足していることが証明できる．

参考文献

1) 森口繁一・宇田川銈久・一松信，数学公式 III 特殊関数，岩波書店，1960
2) 数学ハンドブック編集委員会編，理工学のための数学ハンドブック，丸善株式会社，1960
3) A. Jeffery, Handbook of Mathematical Formulas and Integrals, 2nd Edition, Academic Press, 2000
4) B. Hofmann-Wellenhof, H. Moritz, Physical Geodesy, 2nd Edition, Springer, 2006（B. ホフマン-ウェレンホフ／H. モーリッツ，西修二郎訳，物理測地学，丸善出版，2012）