

5.2 姿勢の時間微分

前節において、姿勢の表現方法として、方向余弦行列、オイラー角、クォータニオンの3種類を扱った。本節では、機体の姿勢が時間的に変化するときの時間微分と角速度の関係を求める。

5.2.1 方向余弦行列の時間微分

航法座標系から機体座標系への方向余弦行列の時間微分は、

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{C}}_n^b(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{C}_n^b}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{C}_n^b(t + \Delta t) - \mathbf{C}_n^b(t)}{\Delta t}\end{aligned}\quad (5.62)$$

と表される。ここに、 $\mathbf{C}_n^b(t)$ は時刻 t における方向余弦行列であり、 $\mathbf{C}_n^b(t + \Delta t)$ は時刻 t から微小時間 Δt だけ経過した時刻 $t + \Delta t$ における方向余弦行列である。ここで、時刻 t における機体座標系から時刻 $t + \Delta t$ における機体座標系への方向余弦行列 $\mathbf{C}_{b(t)}^{b(t+\Delta t)}$ を考える。これらの3個の方向余弦行列の関係は、

$$\mathbf{C}_n^b(t + \Delta t) = \mathbf{C}_{b(t)}^{b(t+\Delta t)} \mathbf{C}_n^b(t) \quad (5.63)$$

となる。このような方向余弦行列 $\mathbf{C}_{b(t)}^{b(t+\Delta t)}$ を求める。経過時間 Δt の間に、第1に移動体の z 軸まわりに角度 φ_z 、第2に移動体の y 軸まわりに角度 φ_y 、第3に移動体の x 軸まわりに角度 φ_x だけ回転したとする。二つの機体座標系間の方向余弦行列は、式 (3.7) を導いたときとまったく同様に、

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{b(t)}^{b(t+\Delta t)} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi_y \cos \varphi_z & \cos \varphi_y \sin \varphi_z & -\sin \varphi_y \\ -\cos \varphi_x \sin \varphi_z + \sin \varphi_x \sin \varphi_y \cos \varphi_z & \cos \varphi_x \cos \varphi_z + \sin \varphi_x \sin \varphi_y \sin \varphi_z & \sin \varphi_x \cos \varphi_y \\ \sin \varphi_x \sin \varphi_z + \cos \varphi_x \sin \varphi_y \cos \varphi_z & -\sin \varphi_x \cos \varphi_z + \cos \varphi_x \sin \varphi_y \sin \varphi_z & \cos \varphi_x \cos \varphi_y \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5.64)$$

となる。ここで、回転角度 $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ はいずれも微小な角度であるとする、次の近似式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi_x &\cong 1, & \sin \varphi_x &\cong \varphi_x \\ \cos \varphi_y &\cong 1, & \sin \varphi_y &\cong \varphi_y \\ \cos \varphi_z &\cong 1, & \sin \varphi_z &\cong \varphi_z \end{aligned} \right\} \quad (5.65)$$

これらの式を式 (5.64) に代入すると,

$$\mathbf{C}_{b(t)}^{b(t+\Delta t)} \cong \begin{bmatrix} 1 & \varphi_z & -\varphi_y \\ -\varphi_z + \varphi_x \varphi_y & 1 + \varphi_x \varphi_y \varphi_z & \varphi_x \\ \varphi_x \varphi_z + \varphi_y & -\varphi_x + \varphi_y \varphi_z & 1 \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

となる. さらに, 2次以上の項を無視すると,

$$\mathbf{C}_{b(t)}^{b(t+\Delta t)} \cong \begin{bmatrix} 1 & \varphi_z & -\varphi_y \\ -\varphi_z & 1 & \varphi_x \\ \varphi_y & -\varphi_x & 1 \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

となる. この式は次のように単位行列と外積行列を使って,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{b(t)}^{b(t+\Delta t)} &\cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{I} - (\boldsymbol{\varphi} \times) \end{aligned} \quad (5.68)$$

と表すことができる. この式を式 (5.63) に代入すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_n^b(t+\Delta t) &\cong (\mathbf{I} - (\boldsymbol{\varphi} \times)) \mathbf{C}_n^b(t) \\ &= \mathbf{C}_n^b(t) - (\boldsymbol{\varphi} \times) \mathbf{C}_n^b(t) \end{aligned} \quad (5.69)$$

となる. さらに, この式を式 (5.62) に代入すると,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}}_n^b(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{C}_n^b(t) - (\boldsymbol{\varphi} \times) \mathbf{C}_n^b(t) - \mathbf{C}_n^b(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-(\boldsymbol{\varphi} \times) \mathbf{C}_n^b(t)}{\Delta t} \\ &= - \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\boldsymbol{\varphi} \times)}{\Delta t} \right) \mathbf{C}_n^b(t) \end{aligned} \quad (5.70)$$

となる. ここで, 右辺の左側の極限值は, 機体座標系の各座標軸まわりの角度の時間微

分, すなわち機体座標系から見た機体の回転角速度 $\boldsymbol{\omega}^b$ である. よって,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\boldsymbol{\Phi}}{\Delta t} &= \boldsymbol{\omega}^b \\ \therefore \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\boldsymbol{\Phi} \times)}{\Delta t} &= (\boldsymbol{\omega}^b \times) = \boldsymbol{\Omega}_{nb}^b \end{aligned} \quad (5.71)$$

となる. ここに, 外積行列の記号 $\boldsymbol{\Omega}$ の右下の添え字 nb は, 記号 n の航法座標系を基準として, 記号 b の機体座標系が回転することを示し, 右上の添え字 b はその回転を機体座標系から見ることを示す. この記号を使うと, 式 (5.70) は,

$$\dot{\mathbf{C}}_n^b = -\boldsymbol{\Omega}_{nb}^b \mathbf{C}_n^b \quad (5.72)$$

と表される. この式の両辺を転置すると,

$$(\dot{\mathbf{C}}_n^b)^T = -(\boldsymbol{\Omega}_{nb}^b \mathbf{C}_n^b)^T = -(\mathbf{C}_n^b)^T (\boldsymbol{\Omega}_{nb}^b)^T \quad (5.73)$$

となる. ここで, 方向余弦行列の転置行列は逆行列であるから,

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{C}_n^b)^T &= (\mathbf{C}_n^b)^{-1} = \mathbf{C}_b^n \\ (\dot{\mathbf{C}}_n^b)^T &= (\dot{\mathbf{C}}_n^b)^{-1} = \dot{\mathbf{C}}_b^n \end{aligned} \right\} \quad (5.74)$$

となる. また, 外積行列は歪対称行列であるから,

$$(\boldsymbol{\Omega}_{nb}^b)^T = -\boldsymbol{\Omega}_{nb}^b \quad (5.75)$$

となる. これらの式を式 (5.73) に代入すると,

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{nb}^b \quad (5.76)$$

となる. ある時刻において方向余弦行列と角速度がわかれば, 式 (5.72) や式 (5.76) を使って方向余弦行列の時間微分を計算することができる.

5.2.2 オイラー角の時間微分

オイラー角の時間微分と角速度の関係を以下に記す．航法座標系から機体座標系への方向余弦行列は，ロール角 φ ，ピッチ角 θ ，方位角 ψ を使って，式 (3.7) より，

$$\mathbf{C}_n^b = \mathbf{C}_2^3 \mathbf{C}_1^2 \mathbf{C}_0^1$$

$$\mathbf{C}_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_1^2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_0^1 = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である．機体座標系を基準とするオイラー角の回転は，方位角 $\psi \rightarrow$ ピッチ角 $\theta \rightarrow$ ロール角 φ の順に回転するように定義されているから，第1の方位角 ψ の変化は，機体の z 軸まわりの角速度 ω_z だけではなく，その次の y 軸まわりの角速度 ω_y ，次いで， x 軸まわりの角速度 ω_x を発生させる．第2のピッチ角 θ の変化は，機体の y 軸まわりの角速度 ω_y だけではなく，その次の x 軸まわりの角速度 ω_x を発生させる．第3のロール角 φ の変化は，機体の x 軸まわりの角速度 ω_x だけを発生させる．以上をまとめると，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^b &= \begin{bmatrix} \omega_x^b \\ \omega_y^b \\ \omega_z^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{C}_3 \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi & \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi & \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \varphi \dot{\theta} \\ -\sin \varphi \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin \theta \dot{\psi} \\ \sin \varphi \cos \theta \dot{\psi} \\ \cos \varphi \cos \theta \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\varphi} - \sin \theta \dot{\psi} \\ \cos \varphi \dot{\theta} + \sin \varphi \cos \theta \dot{\psi} \\ -\sin \varphi \dot{\theta} + \cos \varphi \cos \theta \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \cos \theta \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.77}$$

となる．この式から，オイラー角の時間微分を求めると，

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\varphi \tan\theta & \cos\varphi \tan\theta \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \frac{\sin\varphi}{\cos\theta} & \frac{\cos\varphi}{\cos\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x^b \\ \omega_y^b \\ \omega_z^b \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

となる。ある時刻においてオイラー角と角速度がわかれば、この式を使ってオイラー角の時間微分を計算することができる。(問題 5.4 参照)

Note

一般に、 x, y, z 軸回りの角速度 $\omega_x^b, \omega_y^b, \omega_z^b$ をロール角速度、ピッチ角速度、ヨー角速度と言うが、ロール角、ピッチ角、ヨー角の時間微分の $\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ と混同しないように注意が必要である。

5.2.3 クォータニオンの時間微分

時刻 t における姿勢を表すクォータニオンを $q(t)$ とし、時刻 t から微小時間 Δt だけ経過した時刻 $t + \Delta t$ における姿勢を表すクォータニオンを $q(t + \Delta t)$ とする。時刻 $t + \Delta t$ における姿勢を、時刻 t における姿勢を基準として表したクォータニオンを $\Delta r(t)$ とすると、式 (5.37) の関係を用いて、

$$q(t + \Delta t) = q(t) \otimes \Delta r(t) \quad (5.79)$$

と表される。積の順序に注意が必要である。この座標変換の回転軸の方向余弦ベクトルを $\mathbf{v}(t)$ とし、回転角を $\Delta\alpha$ とすると、回転角 $\Delta\alpha$ が微小であれば、

$$\begin{aligned} \Delta r(t) &= \cos \frac{\Delta\alpha}{2} + \mathbf{v}(t) \sin \frac{\Delta\alpha}{2} \\ &= 1 + \mathbf{v}(t) \frac{\Delta\alpha}{2} \end{aligned} \quad (5.80)$$

と近似できる。この式を式 (5.79) に代入すると、

$$\begin{aligned}
 q(t+\Delta t) &= q(t) \otimes \left(1 + \mathbf{v}(t) \frac{\Delta\alpha}{2} \right) = q(t) + q(t) \otimes \mathbf{v}(t) \frac{\Delta\alpha}{2} \\
 \therefore q(t+\Delta t) - q(t) &= q(t) \otimes \mathbf{v}(t) \frac{\Delta\alpha}{2} = q(t) \otimes \left(0 + \mathbf{v}(t) \frac{\Delta\alpha}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{5.81}$$

となる。2行目の右辺の括弧のなかの0は、クォータニオンの実部が0であることを明示するためであり、省略してもよい。この両辺を Δt で割ると、

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(t+\Delta t) - q(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2} q(t) \otimes (0 + \mathbf{v}(t)) \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \tag{5.82}$$

となる。ここで、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると、記号 $\boldsymbol{\omega}^b$ を角速度として、

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{2} q(t) \otimes (0 + \boldsymbol{\omega}^b(t)) \tag{5.83}$$

となる。ここで、右辺のクォータニオンの積を、式(5.15)を使って行列とベクトルの積の形で表すと、

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_x^b \\ \omega_y^b \\ \omega_z^b \end{bmatrix} \tag{5.84}$$

となる。この式の右辺右側のベクトルの第1行は0であるため、右辺の計算に影響しない。そこで、第1列を除いた4行3列の行列を使って、

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x^b \\ \omega_y^b \\ \omega_z^b \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & -q_0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & -q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x^b \\ \omega_y^b \\ \omega_z^b \end{bmatrix} \tag{5.85}$$

と表すこともできる。

また、式(5.84)において、クォータニオン q を右辺右側に集めて書き換えると、

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x^b & -\omega_y^b & -\omega_z^b \\ \omega_x^b & 0 & \omega_z^b & -\omega_y^b \\ \omega_y^b & -\omega_z^b & 0 & \omega_x^b \\ \omega_z^b & \omega_y^b & -\omega_x^b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

と表すこともできる。ある時刻においてクォータニオンと角速度がわかれば、これらの式のいずれかを使ってクォータニオンの時間微分を計算することができる。

Note

クォータニオンの順序を 1, 2, 3, 0 と表す流儀では、上記の公式は次のように表される。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_z^b & -\omega_y^b & \omega_x^b \\ -\omega_z^b & 0 & \omega_x^b & \omega_y^b \\ \omega_y^b & -\omega_x^b & 0 & \omega_z^b \\ -\omega_x^b & -\omega_y^b & -\omega_z^b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_0 \end{bmatrix}$$

クォータニオンの時間微分の別の表現方法を以下に記す。式 (5.85) において、右辺の 4 行 3 列の行列を \mathbf{Z}^b と定義する。さらに、この行列 \mathbf{Z}^b の第 2 行から第 4 行までの 3 行 3 列の正方部分行列の非対角要素の符号を変えた行列を \mathbf{Z}^n と定義する。すなわち、

$$\mathbf{Z}^b = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & -q_0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & -q_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}^n = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & -q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & -q_0 \end{bmatrix} \quad (5.87)$$

と定義する。この \mathbf{Z} 行列の記号を使うと、式 (5.85) は、

$$\dot{\mathbf{q}} = -\frac{1}{2} \mathbf{Z}^b \boldsymbol{\omega}^b \quad (5.88)$$

と表される。式 (5.87) で定義した行列 \mathbf{Z}^b と行列 \mathbf{Z}^n には次の関係が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Z}^{b^T} \mathbf{Z}^b &= \mathbf{I} \\ \mathbf{Z}^{n^T} \mathbf{Z}^n &= \mathbf{I} \\ \mathbf{Z}^{n^T} \mathbf{Z}^b &= \mathbf{C}_b^n \\ \mathbf{Z}^n &= \mathbf{Z}^b \mathbf{C}_n^b \\ \mathbf{Z}^b &= \mathbf{Z}^n \mathbf{C}_b^n \end{aligned} \right\} \quad (5.89)$$

ここに、記号 \mathbf{I} は 3 行 3 列の単位行列である。(問題 5.5 参照) 式 (5.89) の第 5 式を式 (5.88) に代入すると、

$$\dot{q} = -\frac{1}{2} \mathbf{Z}^n \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\omega}^b = -\frac{1}{2} \mathbf{Z}^n \boldsymbol{\omega}^n \quad (5.90)$$

となる。ここに、記号 $\boldsymbol{\omega}^n$ は航法座標系から見た角速度を示す。

3 種類の姿勢表現の時間微分と角速度の関係を表 5.5 にまとめる。

表 5.5 姿勢の時間微分

姿勢の表現方法	計算式
方向余弦行列	$\dot{\mathbf{C}}_n^b = -\boldsymbol{\Omega}_{nb}^b \mathbf{C}_n^b, \quad \dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{nb}^b$
オイラー角	$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \varphi \tan \theta & \cos \varphi \tan \theta \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \frac{\sin \varphi}{\cos \theta} & \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x^b \\ \omega_y^b \\ \omega_z^b \end{bmatrix}$
クォータニオン	$\dot{q} = -\frac{1}{2} \mathbf{Z}^b \boldsymbol{\omega}^b$

5.3 姿勢の誤差

本節では姿勢の誤差を表現する方法について記す。

5.3.1 姿勢誤差

機体に固定された慣性計測装置は、機体座標系から見た角速度を検知して自らの姿勢を連続的に推定している。しかし、計測誤差などの要因によって、推定された姿勢には常に

誤差が含まれている。姿勢の誤差を表現する方法として、航法座標系の真値と推定値の差に着目する方法と、機体座標系の真値と推定値の差に着目する方法との二通りが考えられる。本書では前者の方法（航法座標系基準）をとる。

x_n 軸, y_n 軸, z_n 軸を航法座標系の真の座標軸とし, \tilde{x}_n 軸, \tilde{y}_n 軸, \tilde{z}_n 軸を慣性計測装置が推定した座標軸とする。推定された航法座標系は, 真の航法座標系と比較して, x_n 軸まわりに角度 φ_1 , y_n 軸まわりに角度 φ_2 , z_n 軸まわりに角度 φ_3 だけ回転しているものとする。図 5.6 は, 代表として z_n 軸まわりの姿勢誤差 φ_3 のみを示している。

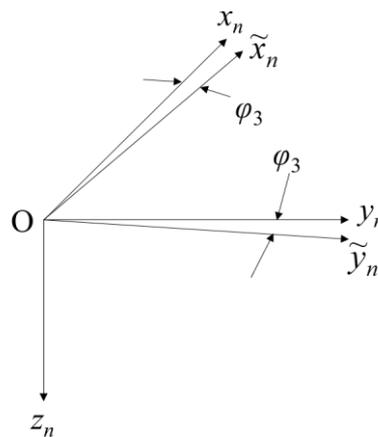


図 5.6 姿勢誤差

これらの角度 $\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$ を姿勢誤差 (attitude error) とする。推定された \tilde{x}_n 軸, \tilde{y}_n 軸, \tilde{z}_n 軸

の単位ベクトルを, 真の航法座標系で表すと, それぞれ $\begin{bmatrix} 1 \\ \varphi_3 \\ -\varphi_2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -\varphi_3 \\ 1 \\ \varphi_1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \varphi_2 \\ -\varphi_1 \\ 1 \end{bmatrix}$ となる。

この 3 個のベクトルを, 順に横に並べると, $\begin{bmatrix} 1 & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & 1 & -\varphi_1 \\ -\varphi_2 & \varphi_1 & 1 \end{bmatrix}$ という 3 行 3 列の行列が得

られる。姿勢誤差の値が小さい場合, この行列は, 推定された航法座標系から真の航法座標系への方向余弦行列の近似式となっている。ここで, この行列の転置行列を,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_3 & -\varphi_2 \\ -\varphi_3 & 1 & \varphi_1 \\ \varphi_2 & -\varphi_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.91)$$

と定義する。この行列 \mathbf{B} は真の航法座標系から推定された航法座標系への方向余弦行列の近似式である。機体座標系から航法座標系への方向余弦行列の真値を \mathbf{C}_b^n とし、推定値を $\hat{\mathbf{C}}_b^n$ とすると、この行列 \mathbf{B} を使って、

$$\hat{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{B}\mathbf{C}_b^n \quad (5.92)$$

と表すことができる。右辺は、右側の行列 \mathbf{C}_b^n によって真の機体座標系から真の航法座標系へ座標変換し、次にその左側の行列 \mathbf{B} によって真の航法座標系から、推定された航法座標系へ座標変換することを示している。それが左辺の真の機体座標系から、推定された航法座標系への座標変換 $\hat{\mathbf{C}}_b^n$ に等しいことを示している。式 (5.91) の行列 \mathbf{B} は、単位行列 \mathbf{I} と、姿勢誤差 $\boldsymbol{\varphi}$ の外積行列を使って、

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} - (\boldsymbol{\varphi} \times) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & 0 & -\varphi_1 \\ -\varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.93)$$

と表すこともできる。

5.3.2 姿勢誤差と方向余弦行列誤差

方向余弦行列の推定値から真値を差し引いた行列を方向余弦行列誤差 (DCM error) と言う。

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{C}_b^n = \begin{bmatrix} \delta c_{11} & \delta c_{12} & \delta c_{13} \\ \delta c_{21} & \delta c_{22} & \delta c_{23} \\ \delta c_{31} & \delta c_{32} & \delta c_{33} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{C}}_b^n - \mathbf{C}_b^n \quad (5.94)$$

方向余弦行列の推定値の式 (5.92) を代入すると、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}\mathbf{C}_b^n &= \mathbf{B}\mathbf{C}_b^n - \mathbf{C}_b^n \\ &= (\mathbf{B} - \mathbf{I})\mathbf{C}_b^n \end{aligned} \quad (5.95)$$

となる。行列 \mathbf{B} に式 (5.93) を代入すると、

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{C}_b^n &= (\mathbf{I} - (\boldsymbol{\varphi} \times) - \mathbf{I}) \mathbf{C}_b^n \\ &= -(\boldsymbol{\varphi} \times) \mathbf{C}_b^n\end{aligned}\quad (5.96)$$

となる。この式を使って姿勢誤差から方向余弦行列誤差を計算することができる。要素で表すと、

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \delta c_{11} & \delta c_{12} & \delta c_{13} \\ \delta c_{21} & \delta c_{22} & \delta c_{23} \\ \delta c_{31} & \delta c_{32} & \delta c_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \varphi_3 & -\varphi_2 \\ -\varphi_3 & 0 & \varphi_1 \\ \varphi_2 & -\varphi_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \varphi_3 c_{21} - \varphi_2 c_{31} & \varphi_3 c_{22} - \varphi_2 c_{32} & \varphi_3 c_{23} - \varphi_2 c_{33} \\ -\varphi_3 c_{11} + \varphi_1 c_{31} & -\varphi_3 c_{12} + \varphi_1 c_{32} & -\varphi_3 c_{13} + \varphi_1 c_{33} \\ \varphi_2 c_{11} - \varphi_1 c_{21} & \varphi_2 c_{12} - \varphi_1 c_{22} & \varphi_2 c_{13} - \varphi_1 c_{23} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\varphi_2 c_{31} + \varphi_3 c_{21} & -\varphi_2 c_{32} + \varphi_3 c_{22} & -\varphi_2 c_{33} + \varphi_3 c_{23} \\ -\varphi_3 c_{11} + \varphi_1 c_{31} & -\varphi_3 c_{12} + \varphi_1 c_{32} & -\varphi_3 c_{13} + \varphi_1 c_{33} \\ -\varphi_1 c_{21} + \varphi_2 c_{11} & -\varphi_1 c_{22} + \varphi_2 c_{12} & -\varphi_1 c_{23} + \varphi_2 c_{13} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5.97)$$

となる。

5.3.3 方向余弦行列誤差とオイラー角誤差

オイラー角の推定値から真値を差し引いた角度をオイラー角誤差と言う。オイラー角と方向余弦行列との関係は、式 (5.6) より、

$$\left. \begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{c_{32}}{c_{33}} \\ \sin \theta &= -c_{31} \\ \tan \psi &= \frac{c_{21}}{c_{11}} \end{aligned} \right\}$$

である。それぞれの式の両辺を微分すると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta \varphi}{\cos^2 \varphi} &= \frac{\delta c_{32} \cdot c_{33} - c_{32} \cdot \delta c_{33}}{c_{33}^2} \\ \cos \theta \delta \theta &= -\delta c_{31} \\ \frac{\delta \psi}{\cos^2 \psi} &= \frac{\delta c_{21} \cdot c_{11} - c_{21} \cdot \delta c_{11}}{c_{11}^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.98)$$

となる。この式を使って方向余弦行列誤差からオイラー角誤差を計算することができる。

5.3.4 姿勢誤差とオイラー角誤差

5.3.2 項の式と 5.3.3 項の式を組み合わせると、

$$\left. \begin{aligned} \delta\varphi &= -\frac{\varphi_1 \cos\psi + \varphi_2 \sin\psi}{\cos\theta} \\ \delta\theta &= \varphi_1 \sin\psi - \varphi_2 \cos\psi \\ \delta\psi &= -(\varphi_1 \cos\psi + \varphi_2 \sin\psi) \tan\theta - \varphi_3 \end{aligned} \right\} \quad (5.99)$$

となる。この式を使って姿勢誤差からオイラー角誤差を計算することができる。(問題 5.6 参照)

5.3.5 方向余弦行列誤差とクォータニオン誤差

方向余弦行列とクォータニオンの関係は、式 (5.55) より、

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + c_{11} + c_{22} + c_{33}} \\ q_1 &= \frac{c_{32} - c_{23}}{4q_0} \\ q_2 &= \frac{c_{13} - c_{31}}{4q_0} \\ q_3 &= \frac{c_{21} - c_{12}}{4q_0} \end{aligned} \right\}$$

である。それぞれの式の両辺を微分すると、

$$\left. \begin{aligned} \delta q_0 &= \frac{\delta c_{11} + \delta c_{22} + \delta c_{33}}{4\sqrt{1 + c_{11} + c_{22} + c_{33}}} = \frac{\delta c_{11} + \delta c_{22} + \delta c_{33}}{8q_0} \\ \delta q_1 &= \frac{\delta c_{32} - \delta c_{23}}{4q_0} - \frac{c_{32} - c_{23}}{4q_0^2} \delta q_0 = \frac{\delta c_{32} - \delta c_{23}}{4q_0} - \frac{q_1}{q_0} \delta q_0 \\ \delta q_2 &= \frac{\delta c_{13} - \delta c_{31}}{4q_0} - \frac{c_{13} - c_{31}}{4q_0^2} \delta q_0 = \frac{\delta c_{13} - \delta c_{31}}{4q_0} - \frac{q_2}{q_0} \delta q_0 \\ \delta q_3 &= \frac{\delta c_{21} - \delta c_{12}}{4q_0} - \frac{c_{21} - c_{12}}{4q_0^2} \delta q_0 = \frac{\delta c_{21} - \delta c_{12}}{4q_0} - \frac{q_3}{q_0} \delta q_0 \end{aligned} \right\} \quad (5.100)$$

となる。この式を使って方向余弦行列誤差からクォータニオン誤差を計算することができる。

5.3.6 クォータニオン誤差と姿勢誤差

式 (5.97) と式 (5.100) を組み合わせると、クォータニオン誤差と姿勢誤差の関係は、

$$\left. \begin{aligned} \delta q_0 &= \frac{\varphi_1 q_1 + \varphi_2 q_2 + \varphi_3 q_3}{2} \\ \delta q_1 &= \frac{-\varphi_1 q_0 - \varphi_2 q_3 + \varphi_3 q_2}{2} \\ \delta q_2 &= \frac{\varphi_1 q_3 - \varphi_2 q_0 - \varphi_3 q_1}{2} \\ \delta q_3 &= \frac{-\varphi_1 q_2 + \varphi_2 q_1 - \varphi_3 q_0}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5.101)$$

となる。(問題 5.7 参照) 行列を使って表すと、

$$\begin{bmatrix} \delta q_0 \\ \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & -q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & -q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} \quad (5.102)$$

となる。右辺左側の 4 行 3 列の行列は、式 (5.87) の \mathbf{Z}^n 行列に他ならないから、

$$\delta \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{Z}^n \boldsymbol{\varphi} \quad (5.103)$$

と表すこともできる。この式を使って姿勢誤差からクォータニオン誤差を計算することができる。この式の両辺に、左側から \mathbf{Z}^n 行列の転置行列をかけると、

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^{nT} \delta \mathbf{q} &= \frac{1}{2} \mathbf{Z}^{nT} \mathbf{Z}^n \boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi} \\ \therefore \boldsymbol{\varphi} &= 2 \mathbf{Z}^{nT} \delta \mathbf{q} \end{aligned} \quad (5.104)$$

となる。ここで、式 (5.89) の $\mathbf{Z}^{nT} \mathbf{Z}^n = \mathbf{I}$ の関係を使った。この式を使ってクォータニオン

誤差から姿勢誤差を計算することができる。

5.3.7 クォータニオン縮減誤差

クォータニオン誤差の要素数は4個であるが、式(5.87)で定義した \mathbf{Z}^n 行列の転置行列をかけて要素数を3個に変換した誤差をクォータニオン縮減誤差 (reduced quaternion error) と言う。記号 δq^n で表すと、

$$\delta q^n = \mathbf{Z}^{nT} \delta q$$

$$\begin{bmatrix} \delta q_1^n \\ \delta q_2^n \\ \delta q_3^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & -q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & -q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & -q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta q_0 \\ \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \end{bmatrix} \quad (5.105)$$

となる。この式を使ってクォータニオン誤差から、クォータニオン縮減誤差を計算することができる。この式を変形すると、

$$\delta q = \mathbf{Z}^n \delta q^n$$

$$\begin{bmatrix} \delta q_0 \\ \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & -q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & -q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta q_1^n \\ \delta q_2^n \\ \delta q_3^n \end{bmatrix} \quad (5.106)$$

となる。この式を使って、逆にクォータニオン縮減誤差からクォータニオン誤差を計算することができる。(問題5.8参照) クォータニオン縮減誤差とクォータニオン誤差は、要素数は異なるが、一対一に対応していることがわかる。

Note

クォータニオンの順序を1, 2, 3, 0と表す流儀では、上記の公式は次のように表される。

$$\begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \\ \delta q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & -q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & -q_0 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta q_1^n \\ \delta q_2^n \\ \delta q_3^n \end{bmatrix}$$

クォータニオン誤差と姿勢誤差の関係式(5.103)と、クォータニオン誤差とクォータニ

オン縮減誤差の関係の式 (5.106) の二つの式を比較すると、左辺は同じで、右辺のなかの \mathbf{Z}^n 行列は共通であるから、次の式が成り立つ。

$$\delta \mathbf{q}^n = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Phi} \quad (5.107)$$

この式より、クォータニオン縮減誤差と姿勢誤差とは、1/2 という係数の違いはあるものの、物理的な意味は同じであることがわかる。

5.4 姿勢の計測

5.4.1 慣性センサを利用した姿勢の計測

加速度センサで重力加速度を計測し、角速度センサで自転角速度を計測することによって移動体の姿勢を計測することができる。ただし、計測中は移動体が静止している必要がある。ロール角とピッチ角は、機体の x, y, z 軸の加速度センサで重力加速度を計測して求めることができる。航法座標系における重力加速度は、式 (4.95) より、

$$\mathbf{g}^n = \begin{bmatrix} g_N \\ g_E \\ g_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

である。航法座標系から機体座標系への方向余弦行列は、式 (3.7) より、

$$\mathbf{C}_n^b = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ -\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \sin \theta \cos \psi & \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \theta \sin \psi & \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \sin \theta \cos \psi & -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \theta \sin \psi & \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix}$$

であるから、静止した機体座標系における加速度センサの計測値 \mathbf{f}^b は、

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^b &= \mathbf{C}_n^b \mathbf{g}^n \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ -\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \sin \theta \cos \psi & \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \theta \sin \psi & \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \sin \theta \cos \psi & -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \theta \sin \psi & \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \\ \therefore \begin{bmatrix} f_x^b \\ f_y^b \\ f_z^b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g \sin \theta \\ -g \sin \varphi \cos \theta \\ -g \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.108)$$

となる。この式の第2行と第3行より、機体のロール角 φ は、

$$\begin{aligned}\tan \varphi &= \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{-f_y^b}{-f_z^b} \\ \therefore \varphi &= \tan^{-1} \left(\frac{-f_y^b}{-f_z^b} \right)\end{aligned}\quad (5.109)$$

と求められる。機体のピッチ角 θ は式 (5.108) の第1行より、

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{f_x^b}{g}, \quad g = \sqrt{f_x^{b^2} + f_y^{b^2} + f_z^{b^2}} \\ \therefore \theta &= \sin^{-1} \left(\frac{f_x^b}{\sqrt{f_x^{b^2} + f_y^{b^2} + f_z^{b^2}}} \right)\end{aligned}\quad (5.110)$$

と求められる。

機体の方位角を求めるには、重力加速度に加えて、機体座標系の x, y, z 軸の角速度センサで地球の自転角速度を計測する必要がある。航法座標系における自転角速度は、式 (4.39) より、

$$\boldsymbol{\Omega}^n = \begin{bmatrix} \Omega_N \\ \Omega_E \\ \Omega_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega \cos \lambda \\ 0 \\ -\Omega \sin \lambda \end{bmatrix}$$

である。静止した機体座標系における角速度センサの計測値 $\boldsymbol{\omega}^b$ は、式 (3.7) を使うと、

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \omega_x^b \\ \omega_y^b \\ \omega_z^b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ -\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \sin \theta \cos \psi & \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \theta \sin \psi & \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \sin \theta \cos \psi & -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \theta \sin \psi & \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \cos \lambda \\ 0 \\ -\Omega \sin \lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Omega \cos \lambda \cos \theta \cos \psi + \Omega \sin \lambda \sin \theta \\ \Omega \cos \lambda (-\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \sin \theta \cos \psi) - \Omega \sin \lambda \sin \varphi \cos \theta \\ \Omega \cos \lambda (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \sin \theta \cos \psi) - \Omega \sin \lambda \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5.111)$$

となる。この式を方位角 ψ について解くにあたり、いったん方向余弦行列を元の積の形に

戻して,

$$\begin{bmatrix} \omega_x^b \\ \omega_y^b \\ \omega_z^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \cos\lambda \\ 0 \\ -\Omega \sin\lambda \end{bmatrix}$$

と書き改める. この式の両辺に左側から, 行列 $\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}^{-1}$ を

かけると,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x^b \\ \omega_y^b \\ \omega_z^b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \cos\lambda \\ 0 \\ -\Omega \sin\lambda \end{bmatrix} \\ \therefore \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\phi \sin\theta & \cos\phi \sin\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ -\sin\theta & \sin\phi \cos\theta & \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x^b \\ \omega_y^b \\ \omega_z^b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Omega \cos\lambda \cos\psi \\ -\Omega \cos\lambda \sin\psi \\ -\Omega \sin\lambda \end{bmatrix} \\ \therefore \begin{bmatrix} \Omega \cos\lambda \cos\psi \\ -\Omega \cos\lambda \sin\psi \\ -\Omega \sin\lambda \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \omega_x^b \cos\theta + \omega_y^b \sin\phi \sin\theta + \omega_z^b \cos\phi \sin\theta \\ \omega_y^b \cos\phi - \omega_z^b \sin\phi \\ -\omega_x^b \sin\theta + \omega_y^b \sin\phi \cos\theta + \omega_z^b \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.112)$$

となる. この式の第1行と第2行より,

$$\begin{aligned} \tan\psi &= \frac{\Omega \cos\lambda \sin\psi}{\Omega \cos\lambda \cos\psi} = \frac{-\omega_y^b \cos\phi + \omega_z^b \sin\phi}{\omega_x^b \cos\theta + \omega_y^b \sin\phi \sin\theta + \omega_z^b \cos\phi \sin\theta} \\ \therefore \psi &= \tan^{-1} \left(\frac{-\omega_y^b \cos\phi + \omega_z^b \sin\phi}{\omega_x^b \cos\theta + \omega_y^b \sin\phi \sin\theta + \omega_z^b \cos\phi \sin\theta} \right) \end{aligned} \quad (5.113)$$

と求められる. 以上の姿勢の計算式をまとめると,

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{-f_y^b}{-f_z^b}\right), \quad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{f_x^b}{\sqrt{f_x^{b2} + f_y^{b2} + f_z^{b2}}}\right)$$

$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{-\omega_y^b \cos\phi + \omega_z^b \sin\phi}{\omega_x^b \cos\theta + \omega_y^b \sin\phi \sin\theta + \omega_z^b \cos\phi \sin\theta}\right)$$

である。これらの式による姿勢の計測誤差と、加速度の誤差 δf 、角速度の誤差 $\delta\omega$ との関係を求めると、

$$\delta\phi = \frac{\delta f}{g \cos\theta} \quad (5.114)$$

$$\delta\theta = \frac{\delta f}{g} \quad (5.115)$$

$$\delta\psi = \sqrt{\frac{\delta\omega^2}{(\Omega \cos\lambda)^2} + (\tan^2\theta - 2 \tan\lambda \tan\theta \cos\psi + \tan^2\lambda) \frac{\delta f^2}{g^2}} \quad (5.116)$$

となる。これらの式の導出は付録とする。

ロール角の誤差 $\delta\phi$ とピッチ角の誤差 $\delta\theta$ は、加速度の誤差 δf に比例する。特にロール角の誤差 $\delta\phi$ はピッチ角の余弦 $\cos\theta$ に反比例する。よって、ピッチ角 θ が $\pm 90^\circ$ に近づくと、ロール角の誤差は無限大になる。ピッチ角が $\pm 90^\circ$ に近づくとロール角 ϕ と方位角 ψ とが区別できなくなって不定となるためである。

方位角の誤差 $\delta\psi$ は、角速度の誤差 $\delta\omega$ の項と加速度の誤差 δf の項の和である。地球の自転角速度は小さいから、多くのセンサの場合、加速度の誤差と重力加速度との比は、角速度の誤差と自転角速度との比よりも十分に小さい。すなわち、

$$\frac{\delta\omega}{\Omega} \gg \frac{\delta f}{g} \quad (5.117)$$

である。この式が成り立つ場合、方位角の誤差の式 (5.116) は、特別な場合（極に近い高緯度、鉛直に近いピッチ角）を除き、右辺の第2項が無視できて、

$$\delta\psi = \frac{\delta\omega}{\Omega \cos\lambda} \quad (5.118)$$

となる。方位角の誤差は角速度の誤差 $\delta\omega$ に比例し、緯度の余弦 $\cos\lambda$ に反比例する。緯度 λ が $\pm 90^\circ$ に近づくと、方位角の誤差は無限大になる。北極と南極に近づくと、方位角が不定となるためである。ただし、式 (5.117) が成り立つ場合であっても、ピッチ角 θ が $\pm 90^\circ$ に近づくと、式 (5.116) の右辺の第2項の中の $\tan\theta$ は無限大となるから、方位角の誤差は無限大になる。前述のとおり、ピッチ角が $\pm 90^\circ$ に近づくと、ロール角 φ と方位角 ψ とが区別できなくなって不定となるためである。

5.4.2 磁気センサを利用した姿勢の計測

地磁気ベクトルの模式図を図 5.7 に示す。図の記号 F は全磁力 (total intensity), I は伏角 (inclination), D は偏角 (declination) である。また、水平面内の成分 H を水平分力と言う。伏角 I の符号は下向きを正、偏角 D の符号は東寄り (東偏) を正とする。

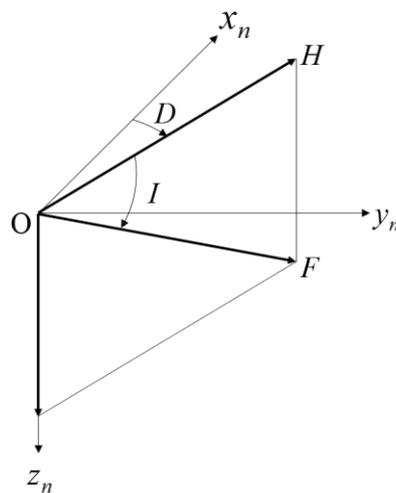


図 5.7 地磁気

この図より、地磁気ベクトルは、

$$\mathbf{m}^n = \begin{bmatrix} m_N \\ m_E \\ m_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \cos I \cos D \\ F \cos I \sin D \\ F \sin I \end{bmatrix} \quad (5.119)$$

と表される。

日本国内では伏角 I は正であり、南部で約 40° 、北部で約 60° である。地磁気の北極 (磁

北極)はカナダの北方にあるが、日本国内の偏角 D は負であり、南部で約 -5° 、北部で約 -9° である。偏角は負号を付けずに 7°W 、西偏 7° などと表されることが多い。国内および海外の地磁気実測値は理科年表(文献3)に掲載されている。また、国土地理院のウェブサイトで国内各地の緯度・経度や地図から調べることができる。地磁気は機体が運動中も観測できるが、周囲の磁性体の影響を受けやすい。

機体座標系における地磁気の計測値を、

$$\mathbf{m}^b = \begin{bmatrix} m_x^b \\ m_y^b \\ m_z^b \end{bmatrix}$$

とすると、磁方位 ψ_m は式 (5.113) とまったく同様に、

$$\psi_m = \tan^{-1} \left(\frac{-m_y^b \cos \varphi + m_z^b \sin \varphi}{m_x^b \cos \theta + m_y^b \sin \varphi \sin \theta + m_z^b \cos \varphi \sin \theta} \right)$$

と求められる。ここに、ロール角 φ とピッチ角 θ は加速度センサの出力から計算する。真北を基準とする方位角 ψ は、磁方位 ψ_m にその計測位置における偏角 D を加えて、

$$\psi = \tan^{-1} \left(\frac{-m_y^b \cos \varphi + m_z^b \sin \varphi}{m_x^b \cos \theta + m_y^b \sin \varphi \sin \theta + m_z^b \cos \varphi \sin \theta} \right) + D \quad (5.120)$$

となる。

問題

- 問題 5.1 単位ベクトルのクォータニオン積の式 (5.16) を証明せよ,
問題 5.2 単位ベクトルのクォータニオン積の式 (5.17) を証明せよ,
問題 5.3 オイラー角をクォータニオンに変換する式 (5.61) を証明せよ,
問題 5.4 オイラー角の時間微分の式 (5.78) を証明せよ.
問題 5.5 \mathbf{Z} 行列に関する式 (5.89) の第 2 式から第 4 式までを証明せよ.
問題 5.6 姿勢誤差とオイラー角誤差との関係式 (5.99) を証明せよ.
問題 5.7 クォータニオン誤差と姿勢誤差との関係式 (5.101) を証明せよ.
問題 5.8 クォータニオン誤差とクォータニオン縮減誤差との関係式 (5.106) を証明せよ.

参考文献

- 1) 金谷健一, 3次元回転-パラメータ計算とリー代数による最適化-, 共立出版, 2019
- 2) 山口功, 木田隆, 岡本修, 狼嘉彰, クォータニオンとオイラー角によるキネマティックス表現の比較について, 航空宇宙技術研究所資料 TM-636, 1991
- 3) 東京天文台編, 理科年表 平成 29 年 第 90 冊, 丸善出版, 2016
- 4) J. B. Kuipers, Quaternions and Rotation Sequences, Princeton University Press, 1999
- 5) R. M. Rogers, Applied Mathematics in Integrated Navigation Systems, 3rd Edition, AIAA, 2007
- 6) D. H. Titterton, Strapdown Inertial Navigation Technology, 2nd Edition, AIAA, 2004
- 7) E. J. Lefferts, F. L. Markley, M. D. Shuster, Kalman Filtering for Spacecraft Attitude Estimation, AIAA-82-0070, AIAA 20th Aerospace Sciences Meeting, 1982