一般座標系のラプラス方程式

1.　一般座標系のラプラス方程式

図 1 に示すような直交座標系（orthogonal coordinates）では，任意の点 P は座標（x, y, z）で表される．各座標の範囲は，$-\infty < x, y, z < +\infty$　である．

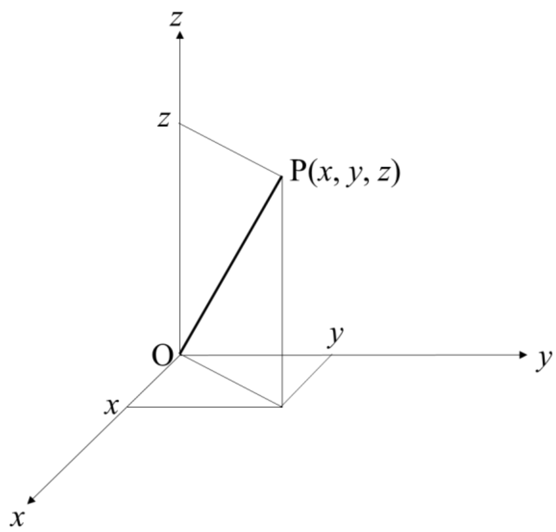

図 1　直交座標系

このような直交座標系において次式に示す形式で表される偏微分方程式を，ラプラス方程式（Laplace's equation）と呼ぶ．

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

ここに，記号 Δ はラプラス演算子やラプラシアン（Laplacian）などと呼ばれ，∇^2　とも表記される．記号 V は座標 x, y, z の何らかの関数であり，上式を満たす 2 回連続微分可能な関数を調和関数（harmonic function）と呼ぶ．

物理や工学の分野でよく使われる座標系には，直交座標系の他に，円柱座標系，球座標系，楕円体座標系などがある．ここで，一般的な座標系の座標を q_1, q_2, q_3 とし，次式に示すように，直交座標系の x, y, z 座標は q_1, q_2, q_3 座標の関数として表されるものとする．

©2022 Futoshi Magosaki

$$
\begin{aligned}
x &= x(q_1, q_2, q_3) \\
y &= y(q_1, q_2, q_3) \\
z &= z(q_1, q_2, q_3)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

この一般座標 q_1, q_2, q_3 におけるラプラス方程式は次式の偏微分方程式で表される．

$$
\Delta V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial V}{\partial q_3}\right)\right)=0 \tag{3}
$$

上式中の 3 個の係数 h_1, h_2, h_3 は次式で計算される．

$$
\begin{aligned}
h_1{}^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2 \\
h_2{}^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2 \\
h_3{}^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2
\end{aligned}
\tag{4}
$$

直交座標系の場合は上式より直ちに $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ となり，これを式(3）に代入すると，式(1）のラプラス方程式に一致する．式(3）と式(4）の導出は，偏微分方程式に関する参考書，例えば参考文献 1）を参照のこと．

2．円柱座標系のラプラス方程式

図 2 に示すような円柱座標系（cylindrical coordinates）では，任意の点 P は座標（r, θ, z）で表される．ここに，r は半径，θ は x 軸からの円周角，z は z 軸座標そのものである．各座標の範囲は，$r \geqq 0, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi, -\infty < z < +\infty$ である．半径 r が一定の点 P の集合は，z 軸を中心軸とする半径 r の円柱側面（円筒面）となる．

©2022 Futoshi Magosaki

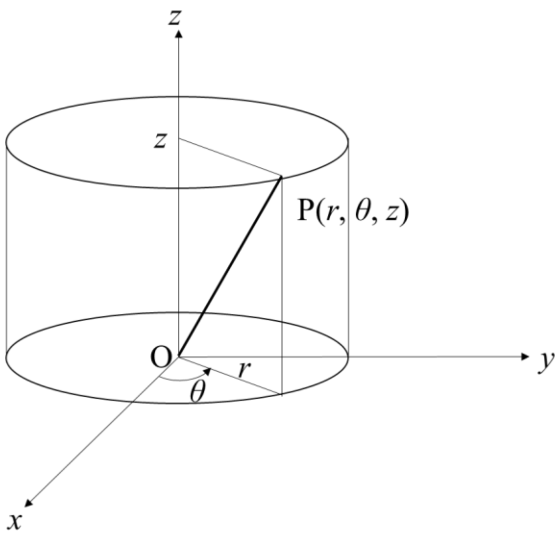

図 2　円柱座標系

直交座標と円柱座標の関係式は,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{bmatrix} \tag{5}$$

と表される．式(4) に代入して係数 h_1, h_2, h_3 を求めると,

$$\begin{aligned} {h_1}^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 \\ &= \cos^2\theta + \sin^2\theta + 0^2 \\ &= 1 \end{aligned} \tag{6-1}$$

$$\begin{aligned} {h_2}^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \\ &= \left(-r\sin\theta\right)^2 + \left(r\cos\theta\right)^2 + 0^2 \\ &= r^2 \end{aligned} \tag{6-2}$$

$$\begin{aligned} {h_3}^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 \\ &= 0^2 + 0^2 + 1^2 \\ &= 1 \end{aligned} \tag{6-3}$$

となる．すなわち,

©2022 Futoshi Magosaki

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1 \tag{7}$$

である．上式を式(3) に代入すると，

$$\begin{aligned}\Delta V &= \frac{1}{1 \cdot r \cdot 1}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r \cdot 1}{1}\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1 \cdot 1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1 \cdot r}{1}\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right)\\ &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right)\\ &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+r\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)\\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\end{aligned} \tag{8}$$

となる．したがって，円柱座標系におけるラプラス方程式は，

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{9}$$

と導かれる．さらに式中の偏微分を実行すると，

$$\Delta V = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial r}+r\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\therefore \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{10}$$

とも表される．

3. 球座標系のラプラス方程式

図 3 に示すような球座標系（spherical coordinates）では，任意の点 P は座標（r, θ, λ）で表される．ここに，r は半径 OP の長さ，θ は半径 r が z 軸となす角度，λ は半径 r を xy 座標面（赤道面）へ投影した直線と x 軸がなす角度，すなわち経度である．各座標の範囲は，$r \geqq 0, 0 \leqq \theta \leqq \pi, 0 \leqq \lambda \leqq 2\pi$ である．半径 r が一定の点 P の集合は，半径 r の球面となる．

©2022 Futoshi Magosaki

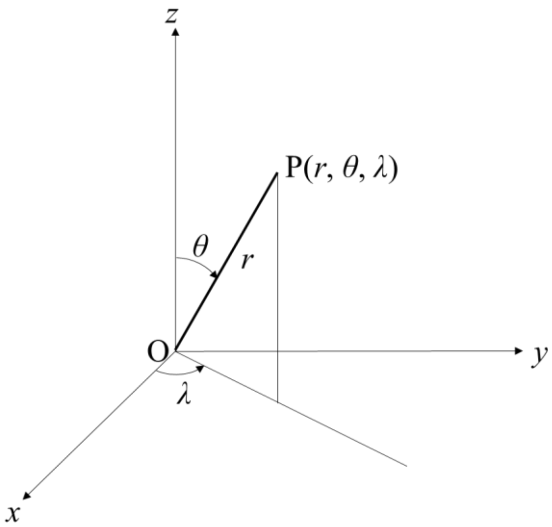

図 3　球座標系

直交座標と球座標の関係式は，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\sin\theta\cos\lambda \\ r\sin\theta\sin\lambda \\ r\cos\theta \end{bmatrix} \tag{11}$$

と表される．式(4) に代入して係数 h_1, h_2, h_3 を求めると，

$$\begin{aligned} h_1{}^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 \\ &= (\sin\theta\cos\lambda)^2 + (\sin\theta\sin\lambda)^2 + \cos^2\theta \\ &= 1 \end{aligned} \tag{12-1}$$

$$\begin{aligned} h_2{}^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \\ &= (r\cos\theta\cos\lambda)^2 + (r\cos\theta\sin\lambda)^2 + (-r\sin\theta)^2 \\ &= r^2 \end{aligned} \tag{12-2}$$

$$\begin{aligned} h_3{}^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2 \\ &= (-r\sin\theta\sin\lambda)^2 + (r\sin\theta\cos\lambda)^2 + 0^2 \\ &= r^2\sin^2\theta \end{aligned} \tag{12-3}$$

となる．すなわち，

©2022 Futoshi Magosaki

$$h_1 = 1,\quad h_2 = r,\quad h_3 = r\sin\theta \tag{13}$$

である．上式を式(3) に代入すると，

$$\begin{aligned}
\Delta V &= \frac{1}{1\cdot r\cdot r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\cdot r\sin\theta}{1}\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r\sin\theta\cdot 1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1\cdot r}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right)\right)\\
&= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right)\right)\\
&= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right)\right)\\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\lambda^2}
\end{aligned} \tag{14}$$

となる．したがって，球座標系におけるラプラス方程式は，

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\lambda^2} = 0 \tag{15}$$

と導かれる．さらに上式中の偏微分を進めると，

$$\begin{aligned}
\Delta V &= \frac{1}{r^2}\left(2r\frac{\partial V}{\partial r}+r^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}+\sin\theta\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\lambda^2}\\
\therefore \Delta V &= \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\tan\theta}\frac{\partial V}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\lambda^2} = 0
\end{aligned} \tag{16}$$

となる．この両辺に r^2 を掛けると，

$$r^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+2r\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial V}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\lambda^2} = 0 \tag{17}$$

とも表される．

4. 楕円体座標系のラプラス方程式

図 4 の左図に示すような楕円体座標系（ellipsoidal coordinates）では，任意の点 P は座標

（u, θ , λ ）と線離心率 E で表される．ここに，u は径 OQ の長さ，θ は径 u が z 軸となす角度，λ は径 u を xy 座標面（赤道面）へ投影した直線と x 軸がなす角度，すなわち経度である．図 4 の右図は，径 u と z 軸を含む平面で切った断面である．座標の範囲は，$u \geqq 0, 0 \leqq \theta \leqq \pi, 0 \leqq \lambda \leqq 2\pi$ である．右図の楕円断面の長半径を a, z 軸方向の短半径を b とすると，線離心率 E は次式で定義される．

$$E = \sqrt{a^2 - b^2} \tag{18}$$

径 $u = b$ で一定の点 P の集合は，長半径 a, 短半径 b の楕円体面となる．このとき，点 Q の集合は，楕円体に外接する半径 a の球面となる．

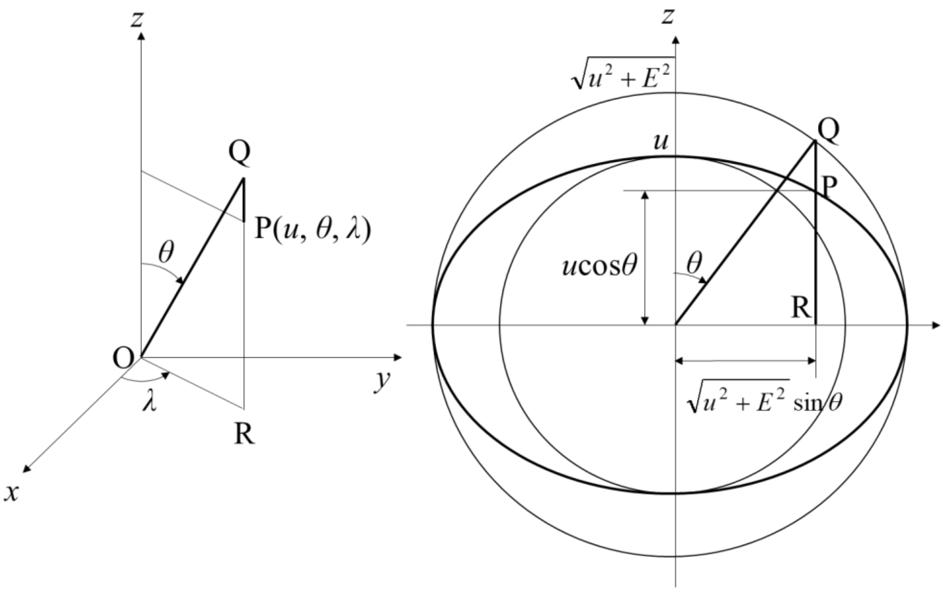

図 4　楕円体座標系

直交座標と楕円体座標の関係は，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{u^2 + E^2}\sin\theta\cos\lambda \\ \sqrt{u^2 + E^2}\sin\theta\sin\lambda \\ u\cos\theta \end{bmatrix} \tag{19}$$

と表される．上式で線離心率 $E = 0$ の場合は球座標系の式(11) に一致する．上式を式(4) に代入して係数 h_1, h_2, h_3 を求めると，

$$
\begin{aligned}
{h_1}^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\
&= \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+E^2}}\sin\theta\cos\lambda\right)^2 + \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+E^2}}\sin\theta\sin\lambda\right)^2 + \cos^2\theta \\
&= \frac{u^2}{u^2+E^2}\sin^2\theta + \cos^2\theta \\
&= \frac{u^2\sin^2\theta + \left(u^2+E^2\right)\cos^2\theta}{u^2+E^2} \\
&= \frac{u^2+E^2\cos^2\theta}{u^2+E^2}
\end{aligned}
\tag{20-1}
$$

$$
\begin{aligned}
{h_2}^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \\
&= \left(\sqrt{u^2+E^2}\cos\theta\cos\lambda\right)^2 + \left(\sqrt{u^2+E^2}\cos\theta\sin\lambda\right)^2 + \left(-u\sin\lambda\right)^2 \\
&= \left(u^2+E^2\right)\cos^2\theta + u^2\sin^2\theta \\
&= u^2 + E^2\cos^2\theta
\end{aligned}
\tag{20-2}
$$

$$
\begin{aligned}
{h_3}^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2 \\
&= \left(-\sqrt{u^2+E^2}\sin\theta\sin\lambda\right)^2 + \left(\sqrt{u^2+E^2}\sin\theta\cos\lambda\right)^2 + 0^2 \\
&= \left(u^2+E^2\right)\sin^2\theta
\end{aligned}
\tag{20-3}
$$

となる．すなわち，

$$
\begin{aligned}
h_1 &= \frac{\sqrt{u^2+E^2\cos^2\theta}}{\sqrt{u^2+E^2}} \\
h_2 &= \sqrt{u^2+E^2\cos^2\theta} \\
h_3 &= \sqrt{u^2+E^2}\sin\theta
\end{aligned}
\tag{21}
$$

である．上式を式(3) に代入する準備として同式の各係数を計算すると，

©2022 Futoshi Magosaki

$$
\begin{aligned}
h_1h_2h_3 &= \frac{\sqrt{u^2+E^2\cos^2\theta}}{\sqrt{u^2+E^2}} \cdot \sqrt{u^2+E^2\cos^2\theta} \cdot \sqrt{u^2+E^2}\sin\theta \\
&= \left(u^2+E^2\cos^2\theta\right)\sin\theta
\end{aligned} \tag{22-1}
$$

$$
\frac{h_2h_3}{h_1} = \frac{\sqrt{u^2+E^2\cos^2\theta}\sqrt{u^2+E^2}\sin\theta}{\dfrac{\sqrt{u^2+E^2\cos^2\theta}}{\sqrt{u^2+E^2}}} = \left(u^2+E^2\right)\sin\theta \tag{22-2}
$$

$$
\frac{h_3h_1}{h_2} = \frac{\sqrt{u^2+E^2}\sin\theta\dfrac{\sqrt{u^2+E^2\cos^2\theta}}{\sqrt{u^2+E^2}}}{\sqrt{u^2+E^2\cos^2\theta}} = \sin\theta \tag{22-3}
$$

$$
\frac{h_1h_2}{h_3} = \frac{\dfrac{\sqrt{u^2+E^2\cos^2\theta}}{\sqrt{u^2+E^2}}\sqrt{u^2+E^2\cos^2\theta}}{\sqrt{u^2+E^2}\sin\theta} = \frac{u^2+E^2\cos^2\theta}{\left(u^2+E^2\right)\sin\theta} \tag{22-4}
$$

となる．これらの式を式(3) に代入すると，

$$
\begin{aligned}
\Delta V &= \frac{1}{\left(u^2+E^2\cos^2\theta\right)\sin\theta}\left(\begin{array}{l}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\left(u^2+E^2\right)\sin\theta\dfrac{\partial V}{\partial u}\right)+\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial V}{\partial\theta}\right) \\ \quad +\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\left(\dfrac{u^2+E^2\cos^2\theta}{\left(u^2+E^2\right)\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial\lambda}\right)\end{array}\right) \\
&= \frac{1}{\left(u^2+E^2\cos^2\theta\right)\sin\theta}\left(\begin{array}{l}\sin\theta\left(2u\dfrac{\partial V}{\partial u}+\left(u^2+E^2\right)\dfrac{\partial^2 V}{\partial u^2}\right)+\left(\cos\theta\dfrac{\partial V}{\partial\theta}+\sin\theta\dfrac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}\right) \\ \quad +\dfrac{u^2+E^2\cos^2\theta}{\left(u^2+E^2\right)\sin\theta}\dfrac{\partial^2 V}{\partial\lambda^2}\end{array}\right) \\
&= \frac{1}{\left(u^2+E^2\cos^2\theta\right)\sin\theta}\left(\begin{array}{l}\left(u^2+E^2\right)\sin\theta\dfrac{\partial^2 V}{\partial u^2}+2u\sin\theta\dfrac{\partial V}{\partial u}+\sin\theta\dfrac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}+\cos\theta\dfrac{\partial V}{\partial\theta} \\ \quad +\dfrac{u^2+E^2\cos^2\theta}{\left(u^2+E^2\right)\sin\theta}\dfrac{\partial^2 V}{\partial\lambda^2}\end{array}\right) \\
&= \frac{1}{u^2+E^2\cos^2\theta}\left(\left(u^2+E^2\right)\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+2u\frac{\partial V}{\partial u}+\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial V}{\partial\theta}+\frac{u^2+E^2\cos^2\theta}{\left(u^2+E^2\right)\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\lambda^2}\right)
\end{aligned} \tag{23}
$$

となる．したがって，楕円体座標系におけるラプラス方程式は，

$$\Delta V=\frac{1}{u^2+E^2\cos^2\theta}\left(\begin{aligned}&\left(u^2+E^2\right)\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+2u\frac{\partial V}{\partial u}+\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial V}{\partial \theta}\\&+\frac{u^2+E^2\cos^2\theta}{\left(u^2+E^2\right)\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}\end{aligned}\right)=0 \tag{24}$$

と導かれる．あるいは，両辺に分母の$\left(u^2+E^2\cos^2\theta\right)$ を掛けると，

$$\left(u^2+E^2\right)\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+2u\frac{\partial V}{\partial u}+\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial V}{\partial \theta}+\frac{u^2+E^2\cos^2\theta}{\left(u^2+E^2\right)\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}=0 \tag{25}$$

となる．特に線離心率$E=0$ の場合は，

$$u^2\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+2u\frac{\partial V}{\partial u}+\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial V}{\partial \theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}=0$$

となり，球座標系におけるラプラス方程式(17）に一致する．

参考文献

1) 大槻義彦，div, grad, rot, ・・・，共立出版 物理数学 One Point 6，1993

2) E. Kreyszig, Applied Engineering Mathematics 2nd Edition, John Wiley & Sons, 1967（E. クライツィグ，田島一郎・近藤次郎訳，技術者のための高等数学第 2 版，3. 偏微分方程式と複素関数論，培風館，1970）

3) B. Hofmann-Wellenhof, H. Moritz, Physical Geodesy, 2nd Edition, Springer, 2006（B. ホフマン-ウェレンホフ／H. モーリッツ，西修二郎訳，物理測地学，丸善出版，2012）

©2022 Futoshi Magosaki