

## 8 慣性航法の運動方程式

ECI 座標系, ECEF 座標系, 航法座標系における移動体の運動方程式をニュートンの運動方程式から導く. 運動方程式は位置方程式, 速度方程式, 姿勢方程式の 3 個の方程式から構成される. 次に, カルマンフィルタに利用するため, それぞれの方程式を線形化した誤差方程式を導く.

### 8.1 ECI 座標系における運動方程式

#### (1) 位置方程式

ニュートンの運動方程式は, 慣性座標系において,

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (8.1)$$

と表される. ここに,  $m$  は質点の質量,  $\mathbf{F}$  は質点に働く外力ベクトル,  $\mathbf{r}$  は質点の位置ベクトル,  $t$  は時刻である. この式の両辺を質量  $m$  で割ると,

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (8.2)$$

となる. ここに,  $\mathbf{f}$  は単位質量当たりの外力 (specific force) である. 位置  $\mathbf{r}$  と速度  $\mathbf{v}$  の関係は,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad (8.3)$$

である. ECI 座標系における位置方程式 (position equation) は,

$$\dot{\mathbf{r}}_{ib}^i = \mathbf{v}_{ib}^i \quad (8.4)$$

となる. ここに, 右下の添え字  $ib$  は ECI 座標系に対する機体座標系の移動を示し, 右上の添え字  $i$  は ECI 座標系からその移動を見ることを示す.

#### (2) 速度方程式

ECI 座標系は慣性座標系であるが, 地球の引力が働いている点に注意する必要がある.

移動体に固定された加速度センサが検知する外力  $\mathbf{f}$  は、移動体の運動加速度  $\ddot{\mathbf{r}}$  と、地球の見かけの引力加速度  $\mathbf{G}$  とのベクトル和である。ここに、引力加速度は式 (4.72) で表される。したがって、ECI 座標系における運動方程式は、

$$\mathbf{f}^i = \frac{d^2 \mathbf{r}_{ib}^i}{dt^2} + \mathbf{G}^i \quad (8.5)$$

となる。しかし、2 次の微分方程式は線形化して計算するには都合がよくない。そこで、ECI 座標系に対する機体の速度  $\dot{\mathbf{v}}_{ib}^i$  を使って表すと、

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^i &= \dot{\mathbf{v}}_{ib}^i + \mathbf{G}^i \\ \therefore \dot{\mathbf{v}}_{ib}^i &= \mathbf{f}^i - \mathbf{G}^i \end{aligned} \quad (8.6)$$

となる。1 次の微分方程式となり、線形化して計算するのに都合がよい。移動体に固定された3軸の加速度センサが検知する加速度は、機体座標系における加速度  $\mathbf{f}^b$  であるから、機体座標系から ECI 座標系への方向余弦行列を  $\mathbf{C}_b^i$  とすると、

$$\mathbf{f}^i = \mathbf{C}_b^i \mathbf{f}^b \quad (8.7)$$

である。この式を式 (8.6) に代入すると、

$$\dot{\mathbf{v}}_{ib}^i = \mathbf{C}_b^i \mathbf{f}^b - \mathbf{G}^i \quad (8.8)$$

となる。この式が ECI 座標系における速度方程式 (velocity equation) である。質点 P が静止している場合は、加速度  $\dot{\mathbf{v}}_{ib}^i = \mathbf{0}$  より、加速度センサの出力  $\mathbf{f}^b$  は  $\mathbf{C}_b^i \mathbf{f}^b = \mathbf{G}^i$  となる。

### (3) 姿勢方程式

方向余弦行列  $\mathbf{C}_b^i$  は時間とともに変化する。その変化を表す微分方程式は、式 (5.76) と同様に、

$$\dot{\mathbf{C}}_b^i = \mathbf{C}_b^i \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \quad (8.9)$$

と表される。ここに、 $\boldsymbol{\Omega}_{ib}^b$  は移動体に固定された角速度センサが検知する角速度  $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$  の外積行列であり、角速度センサの  $x, y, z$  軸の出力を  $\omega_x^b, \omega_y^b, \omega_z^b$  とすると、

$$\boldsymbol{\Omega}_{ib}^b = (\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z^b & \omega_y^b \\ \omega_z^b & 0 & -\omega_x^b \\ -\omega_y^b & \omega_x^b & 0 \end{bmatrix}$$

である。式 (8.9) が ECI 座標系における姿勢方程式 (attitude equation) である。

### 8.2 回転座標系における運動方程式

回転座標系における運動方程式を以下に示す。図 8.1 に示すように、慣性座標系を  $Oxyz$ 、原点を同じくする回転座標系を  $Ox'y'z'$  とする。慣性座標系の単位ベクトルを  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  とし、回転座標系の単位ベクトルを  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  とする。

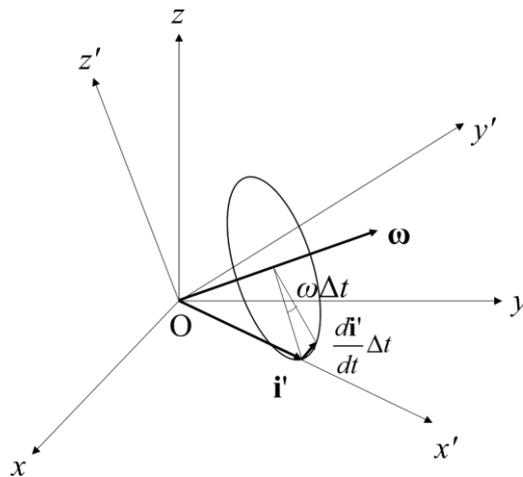


図 8.1 慣性座標系と回転座標系

位置ベクトル  $\mathbf{r}$  の慣性座標系の座標を  $(x, y, z)$  とし、同じ位置ベクトル  $\mathbf{r}'$  の回転座標系の座標を  $(x', y', z')$  とすると、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}' \\ \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ \mathbf{r}' &= x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}' \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

である。位置ベクトルを時間微分すると、質点 P の速度ベクトル  $\mathbf{v}$  は、

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}(x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}') \\ &= \frac{dx'}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt}\mathbf{k}' + x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt}\end{aligned}\tag{8.11}$$

となる。ここで、慣性座標系に対して回転座標系が回転する角速度ベクトルを  $\boldsymbol{\omega}$  とすると、回転座標系の単位ベクトル  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  の時間的变化率は、図 8.1 に示すように、

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}', \quad \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}', \quad \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}'\tag{8.12}$$

と表される。これらの式を式 (8.11) に代入すると、

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{dx'}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt}\mathbf{k}' + x'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}') + y'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}') + z'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}') \\ &= \frac{dx'}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt}\mathbf{k}' + \boldsymbol{\omega} \times (x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}')\end{aligned}\tag{8.13}$$

となる。ここに、 $\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}$  は回転座標系に相対的な速度成分であり、相対速度を

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt}\mathbf{k}'\tag{8.14}$$

と定義すると、式 (8.13) は、

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'\tag{8.15}$$

となる。速度ベクトル  $\mathbf{v}$  を求めるには、回転座標系に相対的な速度ベクトル  $\dot{\mathbf{r}}'$  に、ベクトルの外積  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$  を加えなければならないことがわかる。質点 P の速度ベクトルを、式 (8.10) と同様に、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}' \\ \mathbf{v} &= v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \\ \mathbf{v}' &= v_x' \mathbf{i}' + v_y' \mathbf{j}' + v_z' \mathbf{k}' \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

とおく. この式を時間微分すると, 加速度ベクトルは, 式 (8.15) と同様に,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (8.17)$$

となる. この式に式 (8.15) を代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \right) + \boldsymbol{\omega} \times \left( \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \right) \\ &= \left( \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right) + \left( \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \right) \\ &= \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (8.18)$$

となる. ニュートンの運動方程式 (8.2) に代入すると,

$$\mathbf{f} = \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad (8.19)$$

となる. この式を移項すると, 回転座標系に相対的な加速度は,

$$\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{f} - \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad (8.20)$$

と表される. この式が回転座標系におけるニュートンの運動方程式である.

### 8.3 ECEF 座標系における運動方程式

#### (1) 位置方程式

3.1 節の ECEF 座標系における位置方程式は,

$$\dot{\mathbf{r}}_{eb}^e = \mathbf{v}_{eb}^e \quad (8.21)$$

である。ここに、右下の添え字  $eb$  は ECEF 座標系に対する機体座標系の移動を示し、右上の添え字  $e$  はその移動を ECEF 座標系から見ることを示す。右辺の速度は機体の対地速度 (ground speed) である。

## (2) 速度方程式

ECEF 座標系は、ECI 座標系と原点および  $z$  軸が共通であり、 $z$  軸回りに自転角速度  $\Omega$  で回転している。自転角速度のベクトルは、式 (4.38) より、

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix}$$

と表される。回転座標系における運動方程式 (8.20) の角速度  $\boldsymbol{\omega}$  を自転角速度  $\boldsymbol{\omega}_{ie}^e$  とし、式 (8.6) と同様に、単位質量当たりの外力  $\mathbf{f}$  に、地球の見かけの引力加速度  $\mathbf{G}$  を加えると、

$$\frac{d^2 \mathbf{r}^e}{dt^2} = \mathbf{f}^e - \mathbf{G}^e - \frac{d\boldsymbol{\omega}_{ie}^e}{dt} \times \mathbf{r}^e - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \frac{d\mathbf{r}^e}{dt} - \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{r}^e) \quad (8.22)$$

となる。ECEF 座標系であることを示すため、右上に添え字  $e$  を付けた。ここで、地球の自転角速度は時間的に変化しないことより、右辺の第3項は  $\mathbf{0}$  となり、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}^e}{dt^2} &= \mathbf{f}^e - \mathbf{G}^e - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \frac{d\mathbf{r}^e}{dt} - \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{r}^e) \\ &= \mathbf{f}^e - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \frac{d\mathbf{r}^e}{dt} + \left( -\mathbf{G}^e - \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{r}^e) \right) \end{aligned} \quad (8.23)$$

となる。位置ベクトル  $\mathbf{r}^e$  と自転角速度ベクトル  $\boldsymbol{\omega}_{ie}^e$  を図 8.2 に示す。

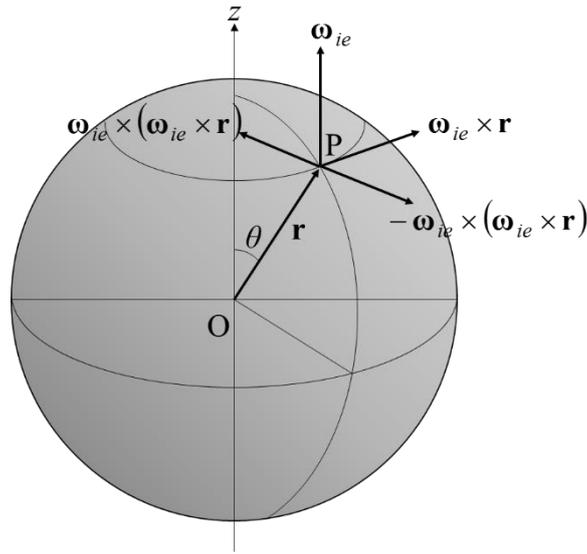


図 8.2 遠心力

ベクトルの外積の関係より， $\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{r}^e$  の方向は東向きであり，その大きさは，

$$\left| \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{r}^e \right| = \left| \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \right| \left| \mathbf{r}^e \right| \sin \theta \quad (8.24)$$

である．ここに，角度  $\theta$  は位置ベクトル  $\mathbf{r}^e$  と  $z$  軸がなす角度であり， $\left| \mathbf{r}^e \right| \sin \theta$  は質点の位置  $P$  から  $z$  軸に下した垂線の長さである． $\boldsymbol{\omega}_{ie}^e$  と  $\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{r}^e$  は直交し，それらの外積  $\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{r}^e)$  の方向は位置  $P$  から  $z$  軸に下す垂線方向である．その大きさは，

$$\left| \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{r}^e) \right| = \left| \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \right|^2 \left| \mathbf{r}^e \right| \sin \theta \quad (8.25)$$

である．角速度の二乗と回転軸からの距離との積，すなわち遠心力の加速度である．したがって，式 (8.23) の第 3 項は，引力加速度  $-\mathbf{G}^e$  と，遠心加速度  $-\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{r}^e)$  のベクトル和，すなわち地球の重力加速度である．見かけの重力加速度を  $\mathbf{g}^e$  とすると，

$$-\mathbf{g}^e = -\mathbf{G}^e - \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{r}^e) \quad (8.26)$$

と表され，式 (8.23) は，

$$\frac{d^2\mathbf{r}^e}{dt^2} = \mathbf{f}^e - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \frac{d\mathbf{r}^e}{dt} - \mathbf{g}^e \quad (8.27)$$

となる。ここで、式 (8.21) の対地速度を使うと、

$$\dot{\mathbf{v}}_{eb}^e = \mathbf{f}^e - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{v}_{eb}^e - \mathbf{g}^e \quad (8.28)$$

となる。右辺の第2項の  $-2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{v}_{eb}^e$  はコリオリ力 (Coriolis force) の加速度である。コリオリ力の方向は図 8.3 に示すように、北半球では対地速度  $\mathbf{v}_e$  と自転軸がなす平面に対して右方向に垂直であり、南半球においては左方向に垂直である。

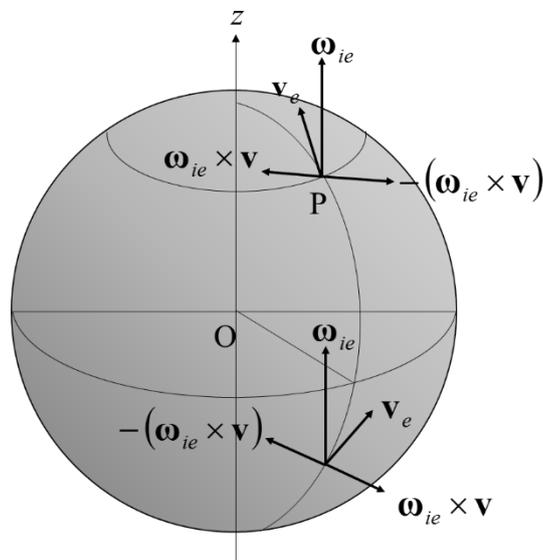


図 8.3 コリオリの力

移動体に固定された加速度センサが検知する加速度は、機体座標系における加速度  $\mathbf{f}^b$  であるから、機体座標系から ECEF 座標系へ方向余弦行列を  $\mathbf{C}_b^e$  とすると、

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{C}_b^e \mathbf{f}^b \quad (8.29)$$

である。この式を式 (8.28) に代入すると、

$$\dot{\mathbf{v}}_{eb}^e = \mathbf{C}_b^e \mathbf{f}^b - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{v}_{eb}^e - \mathbf{g}^e \quad (8.30)$$

となる。この式が ECEF 座標系における速度方程式である。質点 P が静止している場合は、加速度センサの出力  $\mathbf{f}^b$  は  $\mathbf{C}_b^e \mathbf{f}^b = \mathbf{g}^e$  となる。

### (3) 姿勢方程式

方向余弦行列  $\mathbf{C}_b^e$  は時間とともに変化する。その変化を表す微分方程式は、式 (5.76) と同様に、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{C}}_b^e &= \mathbf{C}_b^e \boldsymbol{\Omega}_{eb}^b \\ \boldsymbol{\Omega}_{eb}^b &= (\boldsymbol{\omega}_{eb}^b \times) \end{aligned} \right\} \quad (8.31)$$

となる。ここで、ベクトルの加法より、

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \boldsymbol{\omega}_{ie}^b + \boldsymbol{\omega}_{eb}^b \quad (8.32)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{eb}^b &= \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\omega}_{ie}^b \\ &= \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \mathbf{C}_e^b \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \end{aligned} \quad (8.33)$$

となる。まとめると、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{C}}_b^e &= \mathbf{C}_b^e \boldsymbol{\Omega}_{eb}^b \\ \boldsymbol{\Omega}_{eb}^b &= (\boldsymbol{\omega}_{eb}^b \times) \\ \boldsymbol{\omega}_{eb}^b &= \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \mathbf{C}_e^b \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \end{aligned} \right\} \quad (8.34)$$

となる。この式が ECEF 座標系における姿勢方程式である。

8.4 航法座標系における運動方程式

8.4.1 移動角速度と位置方程式

移動体が南北方向に移動すると、図 8.4 に示すように緯度が変化する。

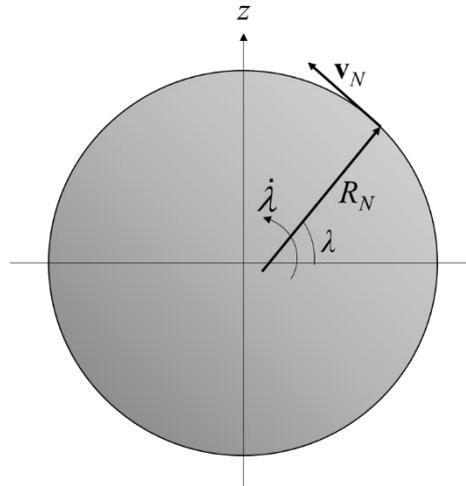


図 8.4 緯度の時間的变化率

緯度  $\lambda$  の時間微分は、

$$\dot{\lambda} = \frac{v_N}{R_N + h} \tag{8.35}$$

と表される。ここに、 $v_N$  は南北方向の速度（北向きが正）、 $h$  は移動体の地球表面からの高度、 $R_N$  は地球の南北方向の曲率半径であり、式 (4.35) より、

$$R_N = \frac{R_e(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \lambda)^{1.5}}$$

である。ここに、 $R_e$  は地球の赤道半径、 $e$  は地球の断面の離心率である。

移動体が東西方向に移動すれば、図 8.5 に示すように経度が変化する。

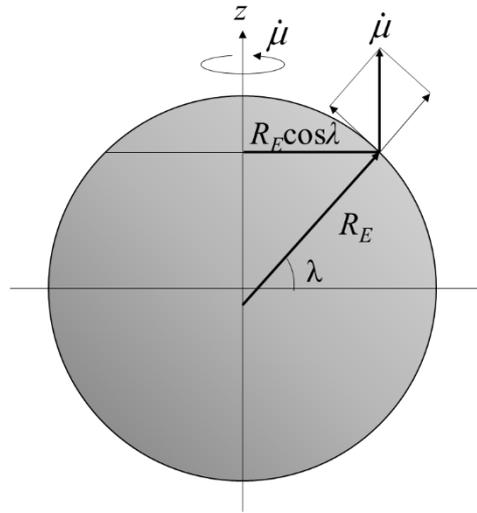


図 8.5 経度の時間的变化率

経度  $\mu$  の時間微分は,

$$\dot{\mu} = \frac{v_E}{(R_E + h) \cos \lambda} \quad (8.36)$$

と表される。ここに、 $v_E$  は東西方向の速度（東向きが正）、 $R_E$  は地球の東西方向の曲率半径であり、式 (4.35) より、

$$R_E = \frac{R_e}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \lambda}}$$

である。

航法座標系の  $x$  軸と  $y$  軸は移動体の位置における水平面内にある。移動体が移動して緯度・経度が変化すると、 $x$  軸と  $y$  軸は新たな位置における水平面内になければならないから、航法座標系は ECEF 座標系に対して回転することになる。この回転角速度を移動角速度 (transport rate) と言う。緯度・経度の時間微分と移動角速度との関係は、

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{bmatrix} \dot{\mu} \cos \lambda \\ -\dot{\lambda} \\ -\dot{\mu} \sin \lambda \end{bmatrix} \quad (8.37)$$

である。ここに、図 8.4 より緯度の時間微分は航法座標系の  $-y$  軸回りの角速度となるため、2 行目に負号が付く。また、図 8.5 より経度の時間微分は航法座標系の  $x$  軸回りの角速度と  $-z$  軸回りの角速度となるため、3 行目に負号が付く。式 (8.37) に式 (8.35) と式 (8.36) を代入すると、

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{bmatrix} \frac{v_E}{R_E + h} \\ -\frac{v_N}{R_N + h} \\ -\frac{v_E \tan \lambda}{R_E + h} \end{bmatrix} \quad (8.38)$$

となり、移動角速度が求められた。例えば、緯度  $\lambda = 0^\circ$  の赤道上で速度が 10 m/s (人の速度) であれば自転角速度の約 2% であり、速度が 900 km/h (飛行機の速度) であれば自転角速度の約 54% である。

航法座標系における位置は緯度・経度・高度の 3 個の変数で表される。高度  $h$  の時間的変化率は、

$$\dot{h} = -v_D \quad (8.39)$$

である。ここに、高度  $h$  は鉛直方向上向きが正、航法座標系の  $z_n$  軸 (Down 軸) は鉛直方向下向きが正であるため、負号が付く。緯度の時間微分の式 (8.35)、経度の時間微分の式 (8.36) と合わせて、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda} &= \frac{v_N}{R_N + h} \\ \dot{\mu} &= \frac{v_E}{(R_E + h) \cos \lambda} \\ \dot{h} &= -v_D \end{aligned} \right\} \quad (8.40)$$

となる。この式が航法座標系における位置方程式である。

## 8.4.2 速度方程式

航法座標系における速度とは、ECEF 座標系における対地速度を航法座標系から見た速度である。

$$\mathbf{v}_{eb}^n = \mathbf{C}_e^n \mathbf{v}_{eb}^e \quad (8.41)$$

ここに、左辺の  $\mathbf{v}_{eb}^n$  は対地速度（右下の添え字  $eb$ ）を航法座標系（右上の添え字  $n$ ）から見た速度であることを示す。この式の両辺を時間微分すると、

$$\dot{\mathbf{v}}_{eb}^n = \mathbf{C}_e^n \dot{\mathbf{v}}_{eb}^e + \dot{\mathbf{C}}_e^n \mathbf{v}_{eb}^e \quad (8.42)$$

となる。この式の第 2 項の左側の  $\dot{\mathbf{C}}_e^n$  は、式 (5.72) と同様に、

$$\dot{\mathbf{C}}_e^n = -\boldsymbol{\Omega}_{en}^n \mathbf{C}_e^n \quad (8.43)$$

である。この式と ECEF 座標系の速度方程式 (8.30) を式 (8.42) に代入すると、

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_{eb}^n &= \mathbf{C}_e^n \left( \mathbf{C}_b^e \mathbf{f}^b - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{v}_{eb}^e - \mathbf{g}^e \right) + \left( -\boldsymbol{\Omega}_{en}^n \mathbf{C}_e^n \right) \mathbf{v}_{eb}^e \\ &= \mathbf{C}_e^n \left( \mathbf{C}_b^e \mathbf{f}^b - 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \mathbf{v}_{eb}^e - \mathbf{g}^e \right) - \boldsymbol{\Omega}_{en}^n \mathbf{C}_e^n \mathbf{v}_{eb}^e \\ &= \mathbf{C}_e^n \mathbf{C}_b^e \mathbf{f}^b - 2\mathbf{C}_e^n \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \mathbf{v}_{eb}^e - \mathbf{C}_e^n \mathbf{g}^e - \boldsymbol{\Omega}_{en}^n \mathbf{C}_e^n \mathbf{v}_{eb}^e \\ &= \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b - 2\mathbf{C}_e^n \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \mathbf{C}_n^e \mathbf{v}_{eb}^e - \mathbf{g}^n - \boldsymbol{\Omega}_{en}^n \mathbf{v}_{eb}^n \\ &= \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b - 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n \mathbf{v}_{eb}^n - \mathbf{g}^n - \boldsymbol{\Omega}_{en}^n \mathbf{v}_{eb}^n \\ \therefore \dot{\mathbf{v}}_{eb}^n &= \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b - \left( 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\Omega}_{en}^n \right) \mathbf{v}_{eb}^n - \mathbf{g}^n \\ \therefore \dot{\mathbf{v}}_{eb}^n &= \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times \mathbf{v}_{eb}^n - \boldsymbol{\omega}_{en}^n \times \mathbf{v}_{eb}^n - \mathbf{g}^n \end{aligned} \quad (8.44)$$

となる。ここに、第 4 行から第 5 行の変形に、 $\mathbf{C}_e^n \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \mathbf{C}_n^e = \boldsymbol{\Omega}_{ie}^n$  の関係を使った。上式が航法座標系の速度方程式である。左辺は航法座標系における見かけの加速度であり、右辺の第 1 項は加速度センサの加速度、第 2 項はコリオリ力の加速度、第 3 項は遠心力の加速度、第 4 項は重力加速度である。点 P が静止している場合は、加速度センサの出力  $\mathbf{f}^b$  は  $\mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b = \mathbf{g}^n$  となる。具体的に行列表示すると、自転角速度の式 (4.39)、移動角速度の式 (8.37)、見かけの重力加速度の式 (4.95) の

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \boldsymbol{\Omega}^n = \begin{bmatrix} \Omega \cos \lambda \\ 0 \\ -\Omega \sin \lambda \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{bmatrix} \dot{\mu} \cos \lambda \\ -\dot{\lambda} \\ -\dot{\mu} \sin \lambda \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

を代入して,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_{eb}^n &= \begin{bmatrix} f_N \\ f_E \\ f_D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2\Omega \cos \lambda \\ 0 \\ -2\Omega \sin \lambda \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\mu} \cos \lambda \\ -\dot{\lambda} \\ -\dot{\mu} \sin \lambda \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_N \\ f_E \\ f_D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2\Omega \sin \lambda & 0 \\ -2\Omega \sin \lambda & 0 & -2\Omega \cos \lambda \\ 0 & 2\Omega \cos \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} 0 & \dot{\mu} \sin \lambda & -\dot{\lambda} \\ -\dot{\mu} \sin \lambda & 0 & -\dot{\mu} \cos \lambda \\ \dot{\lambda} & \dot{\mu} \cos \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_N \\ f_E \\ f_D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2\Omega \sin \lambda \cdot v_E \\ -2\Omega \sin \lambda \cdot v_N - 2\Omega \cos \lambda \cdot v_D \\ 2\Omega \cos \lambda \cdot v_E \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\mu} \sin \lambda \cdot v_E - \dot{\lambda} v_D \\ -\dot{\mu} \sin \lambda \cdot v_N - \dot{\mu} \cos \lambda \cdot v_D \\ \dot{\lambda} v_N + \dot{\mu} \cos \lambda \cdot v_E \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (8.44-1) \end{aligned}$$

と表される。さらに、移動角速度の式として (8.38) を用いると、上式の第3項は、

$$\begin{bmatrix} \frac{v_E}{R_E + h} \\ -\frac{v_N}{R_N + h} \\ -\frac{v_E \tan \lambda}{R_E + h} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{v_E \tan \lambda}{R_E + h} & -\frac{v_N}{R_N + h} \\ -\frac{v_E \tan \lambda}{R_E + h} & 0 & -\frac{v_E}{R_E + h} \\ \frac{v_N}{R_N + h} & \frac{v_E}{R_E + h} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_E^2 \tan \lambda}{R_E + h} - \frac{v_N v_D}{R_N + h} \\ -\frac{v_N v_E \tan \lambda}{R_E + h} - \frac{v_E v_D}{R_E + h} \\ \frac{v_N^2}{R_N + h} + \frac{v_E^2}{R_E + h} \end{bmatrix}$$

となるから、速度方程式は、

$$\dot{\mathbf{v}}_{eb}^n = \begin{bmatrix} f_N \\ f_E \\ f_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2\Omega \sin \lambda \cdot v_E \\ 2\Omega \sin \lambda \cdot v_N + 2\Omega \cos \lambda \cdot v_D \\ -2\Omega \cos \lambda \cdot v_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{v_E^2 \tan \lambda}{R_E + h} + \frac{v_N v_D}{R_N + h} \\ \frac{v_N v_E \tan \lambda}{R_E + h} + \frac{v_E v_D}{R_E + h} \\ -\frac{v_N^2}{R_N + h} - \frac{v_E^2}{R_E + h} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (8.44-2)$$

とも表される。

### 8.4.3 姿勢方程式

航法座標系に対する機体の姿勢を表す方向余弦行列  $\mathbf{C}_b^n$  は時間とともに変化する。その変化を表す微分方程式は、式 (5.76) より、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{C}}_b^n &= \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{nb}^b \\ \boldsymbol{\Omega}_{nb}^b &= (\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times) \end{aligned} \right\} \quad (8.45)$$

となる。ここで、ベクトルの加法より、

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \boldsymbol{\omega}_{ie}^b + \boldsymbol{\omega}_{en}^b + \boldsymbol{\omega}_{nb}^b \quad (8.46)$$

と表すことができる。  $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$  は慣性座標系に対して機体座標系が回転する角速度、  $\boldsymbol{\omega}_{ie}^b$  は地球の自転角速度、  $\boldsymbol{\omega}_{en}^n$  は移動角速度、  $\boldsymbol{\omega}_{nb}^b$  は航法座標系に対する機体座標系の回転角速度である。この式より、式 (8.45) の角速度  $\boldsymbol{\omega}_{nb}^b$  は、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{nb}^b &= \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\omega}_{ie}^b - \boldsymbol{\omega}_{en}^b \\ &= \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \mathbf{C}_n^b (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \end{aligned} \quad (8.47)$$

と表される。まとめると、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{C}}_b^n &= \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{nb}^b \\ \boldsymbol{\Omega}_{nb}^b &= (\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times) \\ \boldsymbol{\omega}_{nb}^b &= \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \mathbf{C}_n^b (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \end{aligned} \right\} \quad (8.48)$$

となる。ここに、3番目の式の右辺の第2項の中の地球の自転角速度  $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$  は、式 (4.39) より、

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \begin{bmatrix} \Omega \cos \lambda \\ 0 \\ -\Omega \sin \lambda \end{bmatrix}$$

である。式 (8.48) が航法座標系における姿勢方程式である。

### 8.5 姿勢・速度・位置方程式のまとめ

ECI 座標系，ECEF 座標系，航法座標系のそれぞれの座標系における姿勢方程式，速度方程式，位置方程式を表 8.1 にまとめる。

表 8.1 座標系と姿勢・速度・位置方程式

	姿勢	速度	位置
ECI	$\dot{\mathbf{C}}_b^i = \mathbf{C}_b^i \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b$	$\dot{\mathbf{v}}_{ib}^i = \mathbf{C}_b^i \mathbf{f}^b - \mathbf{G}^i$	$\dot{\mathbf{r}}_{ib}^i = \mathbf{v}_{ib}^i$
ECEF	$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}}_b^e &= \mathbf{C}_b^e \boldsymbol{\Omega}_{eb}^b \\ \boldsymbol{\omega}_{eb}^b &= \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \mathbf{C}_e^b \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \end{aligned}$	$\dot{\mathbf{v}}_{eb}^e = \mathbf{C}_b^e \mathbf{f}^b - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{v}_{eb}^e - \mathbf{g}^e$	$\dot{\mathbf{r}}_{eb}^e = \mathbf{v}_{eb}^e$
航法	$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}}_b^n &= \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{nb}^b \\ \boldsymbol{\omega}_{nb}^b &= \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \mathbf{C}_n^b (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \end{aligned}$	$\dot{\mathbf{v}}_{eb}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}_{eb}^n - \mathbf{g}^n$	$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \frac{v_N}{R_N + h} \\ \dot{\mu} &= \frac{v_E}{(R_E + h) \cos \lambda} \\ \dot{h} &= -v_D \end{aligned}$

それぞれの座標系において、重力加速度（あるいは引力加速度）が既知で、初期条件も既知の場合、もし加速度センサと角速度センサが完全であれば、これらの姿勢方程式，速度方程式，位置方程式から移動体の姿勢・速度・位置を完全に予測することができる。

## 8.6 航法座標系における誤差方程式

姿勢方程式，速度方程式，位置方程式は状態変数に対して非線形な方程式であるから，直ちにカルマンフィルタを適用することはできない．線形化するため，状態変数の微分の間になり立つ方程式，すなわち誤差方程式を求める．ここでは，簡略化のため，式 (4.36) の平均曲率半径  $R$  を使うことにする．

$$R = \sqrt{R_N R_E}$$

### 8.6.1 位置誤差方程式

位置方程式 (8.40) を状態変数の速度と位置で微分すると，

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{\lambda} \\ \delta\dot{\mu} \\ \delta\dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta v_N}{R+h} - \frac{v_N \delta h}{(R+h)^2} \\ \frac{\delta v_E}{(R+h)\cos\lambda} + \frac{v_E \tan\lambda \delta\lambda}{(R+h)\cos\lambda} - \frac{v_E \delta h}{(R+h)^2 \cos\lambda} \\ -\delta v_D \end{bmatrix} \quad (8.49)$$

となる．右辺を速度誤差の項と位置誤差の項に分けて表すと，

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{\lambda} \\ \delta\dot{\mu} \\ \delta\dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R+h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(R+h)\cos\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_N \\ \delta v_E \\ \delta v_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{v_N}{(R+h)^2} \\ \frac{v_E \tan\lambda}{(R+h)\cos\lambda} & 0 & -\frac{v_E}{(R+h)^2 \cos\lambda} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\lambda \\ \delta\mu \\ \delta h \end{bmatrix} \quad (8.50)$$

となる．左辺の位置誤差の時間微分が，右辺の第1項の速度誤差，第2項の位置誤差で線形化された．この式が位置誤差方程式 (position error equation) である．

### 8.6.2 速度誤差方程式

速度方程式は式 (8.44) より，

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b - \left( 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n \right) \times \mathbf{v} - \mathbf{g}^n$$

である。速度の推定値に対しても同様に、

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}} = \hat{\mathbf{C}}_b^n \hat{\mathbf{f}}^b - (2\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n) \times \hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{g}}^n \quad (8.51)$$

と表される。ここで、変数の推定値，真値，誤差の三者の関係は、

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{v}} &= \mathbf{v} + \delta\ddot{\mathbf{v}} \\ \hat{\mathbf{C}}_b^n &= (\mathbf{I} - (\boldsymbol{\varphi} \times)) \mathbf{C}_b^n \\ \hat{\mathbf{f}}^b &= \mathbf{f}^b + \delta\mathbf{f}^b \\ \hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n &= \boldsymbol{\omega}_{en}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n \\ \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n &= \boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n \\ \hat{\mathbf{g}}^n &= \mathbf{g}^n + \delta\mathbf{g}^n \end{aligned} \right\} \quad (8.52)$$

と表される。式 (8.51) の速度の推定値から真値を引くと、

$$\begin{aligned} \delta\dot{\mathbf{v}} &= \dot{\hat{\mathbf{v}}} - \dot{\mathbf{v}} \\ &= \left( \hat{\mathbf{C}}_b^n \hat{\mathbf{f}}^b - (2\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n) \times \hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{g}}^n \right) - \left( \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v} - \mathbf{g}^n \right) \\ &= \left( \hat{\mathbf{C}}_b^n \hat{\mathbf{f}}^b - \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b \right) + \left( - (2\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n) \times \hat{\mathbf{v}} + (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v} \right) - \left( \hat{\mathbf{g}}^n - \mathbf{g}^n \right) \end{aligned} \quad (8.53)$$

となり，3項の和となる。ここで，第1項は，式 (8.52) の第2式を代入して，2次の項を無視すると、

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}}_b^n \hat{\mathbf{f}}^b - \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b &= (\mathbf{I} - (\boldsymbol{\varphi} \times)) \mathbf{C}_b^n (\mathbf{f}^b + \delta\mathbf{f}^b) - \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b \\ &= \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b + \mathbf{C}_b^n \delta\mathbf{f}^b - (\boldsymbol{\varphi} \times) \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b - (\boldsymbol{\varphi} \times) \mathbf{C}_b^n \delta\mathbf{f}^b - \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b \\ &= -(\boldsymbol{\varphi} \times) \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b + \mathbf{C}_b^n \delta\mathbf{f}^b \\ &= -(\boldsymbol{\varphi} \times) \mathbf{f}^n + \mathbf{C}_b^n \delta\mathbf{f}^b \\ &= (\mathbf{f}^n \times) \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{C}_b^n \delta\mathbf{f}^b \end{aligned} \quad (8.54)$$

となる。式 (8.53) の第2項は，式 (8.52) を代入して2次の項を無視すると、

$$\begin{aligned}
 & -\left(2\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n\right) \times \tilde{\mathbf{v}} + \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right) \times \mathbf{v} \\
 & = -\left(2\left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n\right) + \left(\boldsymbol{\omega}_{en}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\right) \times (\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}) + \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right) \times \mathbf{v} \\
 & = -\left(\left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right) + \left(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\right) \times (\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}) + \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right) \times \mathbf{v} \\
 & = -\left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right) \times \delta\mathbf{v} - \left(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n\right) \times \mathbf{v}
 \end{aligned} \tag{8.55}$$

となる。これらの2式を式 (8.53) に代入すると、

$$\delta\dot{\mathbf{v}}^n = \left(\mathbf{f}^n \times\right) \boldsymbol{\phi} + \mathbf{C}_b^n \delta\mathbf{f}^b - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right) \times \delta\mathbf{v} - \left(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n\right) \times \mathbf{v} - \delta\mathbf{g}^n \tag{8.56}$$

となる。この微分方程式が速度誤差方程式 (velocity error equation) である。ここで、最後の項の見かけの重力加速度の推定誤差  $\delta\mathbf{g}^n$  として、高度  $h$  の誤差による成分を考えると、式 (4.99) より、

$$-\delta g_z^n = \delta\left(g(0) - \frac{2g(0)}{R}h\right) = -\frac{2g}{R}\delta h \tag{8.57}$$

となる。速度誤差方程式をベクトルと行列で表すと、

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \delta\dot{v}_N \\ \delta\dot{v}_E \\ \delta\dot{v}_D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -f_D^n & f_E^n \\ f_D^n & 0 & -f_N^n \\ -f_E^n & f_N^n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta f_x^b \\ \delta f_y^b \\ \delta f_z^b \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} \frac{v_D}{R+h} & -2\Omega\sin\lambda - \frac{2v_E\tan\lambda}{R+h} & \frac{v_N}{R+h} \\ 2\Omega\sin\lambda + \frac{v_E\tan\lambda}{R+h} & \frac{v_D}{R+h} + \frac{v_N\tan\lambda}{R+h} & 2\Omega\cos\lambda + \frac{v_E}{R+h} \\ -\frac{2v_N}{R+h} & -2\Omega\cos\lambda - \frac{2v_E}{R+h} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_N \\ \delta v_E \\ \delta v_D \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} -2v_E\Omega\cos\lambda - \frac{v_E^2}{(R+h)\cos^2\lambda} & 0 & -\frac{v_Nv_D}{(R+h)^2} + \frac{v_E^2\tan\lambda}{(R+h)^2} \\ -2v_D\Omega\sin\lambda + 2v_N\Omega\cos\lambda + \frac{v_Nv_E}{(R+h)\cos^2\lambda} & 0 & -\frac{v_Ev_D}{(R+h)^2} - \frac{v_Nv_E\tan\lambda}{(R+h)^2} \\ 2v_E\Omega\sin\lambda & 0 & \frac{v_E^2}{(R+h)^2} + \frac{v_N^2}{(R+h)^2} - \frac{2g}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\lambda \\ \delta\mu \\ \delta h \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{8.58}$$

となる。左辺の速度誤差の時間微分が、右辺の第1項の姿勢誤差、第2項の加速度センサ誤差、第3項の速度誤差、第4項の位置誤差で線形化された。この式の導出は付録とする。

### 8.6.3 姿勢誤差方程式

方向余弦行列の誤差  $\delta \mathbf{C}_b^n$  と姿勢誤差  $\boldsymbol{\varphi}$  との関係は、式 (5.96) より、

$$\delta \mathbf{C}_b^n = \hat{\mathbf{C}}_b^n - \mathbf{C}_b^n = -(\boldsymbol{\varphi} \times) \mathbf{C}_b^n$$

である。この式より、方向余弦行列の推定値  $\hat{\mathbf{C}}_b^n$  は、

$$\hat{\mathbf{C}}_b^n = (\mathbf{I} - (\boldsymbol{\varphi} \times)) \mathbf{C}_b^n \quad (8.59)$$

と表される。これらの2式より、

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\varphi} \times) \mathbf{C}_b^n &= -(\hat{\mathbf{C}}_b^n - \mathbf{C}_b^n) \\ \therefore (\boldsymbol{\varphi} \times) &= -(\hat{\mathbf{C}}_b^n - \mathbf{C}_b^n) \mathbf{C}_n^b = -\hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{C}_n^b + \mathbf{I} \end{aligned} \quad (8.60)$$

となる。この式の両辺を時間微分すると、

$$(\dot{\boldsymbol{\varphi}} \times) = -\dot{\hat{\mathbf{C}}}_b^n \mathbf{C}_n^b - \hat{\mathbf{C}}_b^n \dot{\mathbf{C}}_n^b \quad (8.61)$$

となる。ここで、方向余弦行列  $\mathbf{C}_b^n$  の時間微分は、式 (5.76) より、

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{nb}^b$$

である。また、ベクトルの加法より、

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\omega}_{ib}^b &= \boldsymbol{\omega}_{in}^b + \boldsymbol{\omega}_{nb}^b \\
 \therefore \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b &= \boldsymbol{\Omega}_{in}^b + \boldsymbol{\Omega}_{nb}^b \\
 \therefore \boldsymbol{\Omega}_{nb}^b &= \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\Omega}_{in}^b
 \end{aligned} \tag{8.62}$$

と表される。これらの2式より、

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{C}}_b^n &= \mathbf{C}_b^n \left( \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\Omega}_{in}^b \right) \\
 &= \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b - \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{in}^b \\
 &= \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b - \mathbf{C}_b^n \mathbf{C}_n^b \boldsymbol{\Omega}_{in}^n \mathbf{C}_b^n \\
 &= \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\Omega}_{in}^n \mathbf{C}_b^n
 \end{aligned} \tag{8.63}$$

となる。ここに、第2行から第3行の変形に、 $\boldsymbol{\Omega}_{in}^b = \mathbf{C}_n^b \boldsymbol{\Omega}_{in}^n \mathbf{C}_b^n$  の関係を使った。この式の両辺を転置すると、

$$\begin{aligned}
 \left( \dot{\mathbf{C}}_b^n \right)^T &= \left( \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\Omega}_{in}^n \mathbf{C}_b^n \right)^T \\
 \therefore \dot{\mathbf{C}}_n^b &= -\boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \mathbf{C}_n^b + \mathbf{C}_n^b \boldsymbol{\Omega}_{in}^n
 \end{aligned} \tag{8.64}$$

となる。ここに、外積行列は歪対称行列であることを使った。方向余弦行列の推定値 $\hat{\mathbf{C}}_b^n$ の時間微分も全く同様に、

$$\dot{\hat{\mathbf{C}}}_b^n = \hat{\mathbf{C}}_b^n \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ib}^b - \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{in}^n \hat{\mathbf{C}}_b^n \tag{8.65}$$

となる。これらの2式を式 (8.61) に代入すると、

$$\begin{aligned}
 (\dot{\boldsymbol{\phi}} \times) &= -\left( \hat{\mathbf{C}}_b^n \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ib}^b - \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{in}^n \hat{\mathbf{C}}_b^n \right) \mathbf{C}_n^b - \hat{\mathbf{C}}_b^n \left( -\boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \mathbf{C}_n^b + \mathbf{C}_n^b \boldsymbol{\Omega}_{in}^n \right) \\
 &= -\hat{\mathbf{C}}_b^n \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ib}^b \mathbf{C}_n^b + \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{in}^n \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{C}_n^b + \hat{\mathbf{C}}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \mathbf{C}_n^b - \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{C}_n^b \boldsymbol{\Omega}_{in}^n \\
 &= -\hat{\mathbf{C}}_b^n \left( \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ib}^b - \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \right) \mathbf{C}_n^b + \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{in}^n \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{C}_n^b - \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{C}_n^b \boldsymbol{\Omega}_{in}^n
 \end{aligned} \tag{8.66}$$

となる。この式に式 (8.59) を代入すると、

$$\begin{aligned}
 (\dot{\boldsymbol{\varphi}} \times) &= -(\mathbf{I} - (\boldsymbol{\varphi} \times)) \mathbf{C}_b^n (\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ib}^b - \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b) \mathbf{C}_n^b + \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{in}^n (\mathbf{I} - (\boldsymbol{\varphi} \times)) \mathbf{C}_b^n \mathbf{C}_n^b \\
 &\quad - (\mathbf{I} - (\boldsymbol{\varphi} \times)) \mathbf{C}_b^n \mathbf{C}_n^b \boldsymbol{\Omega}_{in}^n \\
 &= -(\mathbf{I} - (\boldsymbol{\varphi} \times)) \mathbf{C}_b^n (\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ib}^b - \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b) \mathbf{C}_n^b + \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{in}^n (\mathbf{I} - (\boldsymbol{\varphi} \times)) - (\mathbf{I} - (\boldsymbol{\varphi} \times)) \boldsymbol{\Omega}_{in}^n \\
 &= -(\mathbf{I} - (\boldsymbol{\varphi} \times)) \mathbf{C}_b^n (\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ib}^b - \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b) \mathbf{C}_n^b + \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{in}^n - \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{in}^n (\boldsymbol{\varphi} \times) - \boldsymbol{\Omega}_{in}^n + (\boldsymbol{\varphi} \times) \boldsymbol{\Omega}_{in}^n \\
 &= -\mathbf{C}_b^n (\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ib}^b - \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b) \mathbf{C}_n^b + (\boldsymbol{\varphi} \times) \mathbf{C}_b^n (\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ib}^b - \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b) \mathbf{C}_n^b \\
 &\quad + (\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{in}^n - \boldsymbol{\Omega}_{in}^n) - \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{in}^n (\boldsymbol{\varphi} \times) + (\boldsymbol{\varphi} \times) \boldsymbol{\Omega}_{in}^n
 \end{aligned} \tag{8.67}$$

となる。ここで、角速度の外積行列の誤差を、

$$\left. \begin{aligned}
 \delta \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b &= \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ib}^b - \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \\
 \delta \boldsymbol{\Omega}_{in}^n &= \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{in}^n - \boldsymbol{\Omega}_{in}^n
 \end{aligned} \right\} \tag{8.68}$$

と表すと、

$$(\dot{\boldsymbol{\varphi}} \times) = -\mathbf{C}_b^n \delta \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \mathbf{C}_n^b + (\boldsymbol{\varphi} \times) \mathbf{C}_b^n \delta \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \mathbf{C}_n^b + \delta \boldsymbol{\Omega}_{in}^n - \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{in}^n (\boldsymbol{\varphi} \times) + (\boldsymbol{\varphi} \times) \boldsymbol{\Omega}_{in}^n \tag{8.69}$$

となる。ここで、右辺の第 2 項は、姿勢誤差  $(\boldsymbol{\varphi} \times)$  と角速度誤差  $\delta \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b$  の積の項であるから無視すると、

$$(\dot{\boldsymbol{\varphi}} \times) = -\mathbf{C}_b^n \delta \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \mathbf{C}_n^b + \delta \boldsymbol{\Omega}_{in}^n - \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{in}^n (\boldsymbol{\varphi} \times) + (\boldsymbol{\varphi} \times) \boldsymbol{\Omega}_{in}^n \tag{8.70}$$

となる。この式の右辺の第 3 項は、

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{in}^n (\boldsymbol{\varphi} \times) = (\boldsymbol{\Omega}_{in}^n + \delta \boldsymbol{\Omega}_{in}^n) (\boldsymbol{\varphi} \times) = \boldsymbol{\Omega}_{in}^n (\boldsymbol{\varphi} \times) + \delta \boldsymbol{\Omega}_{in}^n (\boldsymbol{\varphi} \times) \tag{8.71}$$

であるが、この第 2 項は角速度誤差  $\delta \boldsymbol{\Omega}_{in}^n$  と姿勢誤差  $(\boldsymbol{\varphi} \times)$  の積であるから無視すると、式 (8.70) は、

$$(\dot{\boldsymbol{\varphi}} \times) = -\mathbf{C}_b^n \delta \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \mathbf{C}_n^b + \delta \boldsymbol{\Omega}_{in}^n - \boldsymbol{\Omega}_{in}^n (\boldsymbol{\varphi} \times) + (\boldsymbol{\varphi} \times) \boldsymbol{\Omega}_{in}^n \tag{8.72}$$

となる。この式の右辺の第1項は  $\mathbf{C}_b^n \delta \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \mathbf{C}_n^b = \delta \boldsymbol{\Omega}_{ib}^n$  である。第3項と第4項はベクトル三重積の公式 (2.25) より、

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times)(\boldsymbol{\phi} \times) - (\boldsymbol{\phi} \times)(\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times) &= ((\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \boldsymbol{\phi}) \times) \\ \therefore \boldsymbol{\Omega}_{in}^n (\boldsymbol{\phi} \times) - (\boldsymbol{\phi} \times) \boldsymbol{\Omega}_{in}^n &= ((\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \boldsymbol{\phi}) \times) \end{aligned} \quad (8.73)$$

と表される。したがって、式 (8.72) は、

$$\begin{aligned} (\dot{\boldsymbol{\phi}} \times) &= -\delta \boldsymbol{\Omega}_{ib}^n + \delta \boldsymbol{\Omega}_{in}^n - ((\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \boldsymbol{\phi}) \times) \\ &= -(\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^n \times) + (\delta \boldsymbol{\omega}_{in}^n \times) - ((\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \boldsymbol{\phi}) \times) \end{aligned} \quad (8.74)$$

となる。この式のすべての項が外積行列であるから、ベクトルに書き直すと、

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = -\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^n + \delta \boldsymbol{\omega}_{in}^n - \boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \boldsymbol{\phi} \quad (8.75)$$

となる。ここで、 $\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^n = \mathbf{C}_b^n \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b$  であるから、

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = -\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \boldsymbol{\phi} + \delta \boldsymbol{\omega}_{in}^n - \mathbf{C}_b^n \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \quad (8.76)$$

となる。この微分方程式が姿勢誤差方程式 (attitude error equation) である。この方程式をベクトルと行列で表すと、

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\Omega \sin \lambda - \frac{v_E \tan \lambda}{R+h} & \frac{v_N}{R+h} \\ \Omega \sin \lambda + \frac{v_E \tan \lambda}{R+h} & 0 & \Omega \cos \lambda + \frac{v_E}{R+h} \\ -\frac{v_N}{R+h} & -\Omega \cos \lambda - \frac{v_E}{R+h} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R+h} & 0 \\ -\frac{1}{R+h} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\tan \lambda}{R+h} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_N \\ \delta v_E \\ \delta v_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Omega \sin \lambda & 0 & -\frac{v_E}{(R+h)^2} \\ 0 & 0 & \frac{v_N}{(R+h)^2} \\ -\Omega \cos \lambda - \frac{v_E}{(R+h) \cos^2 \lambda} & 0 & \frac{v_E \tan \lambda}{(R+h)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \lambda \\ \delta \mu \\ \delta h \end{bmatrix} \\
 &- \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \omega_x^b \\ \delta \omega_y^b \\ \delta \omega_z^b \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{8.77}$$

となる。左辺の姿勢誤差の時間微分が、右辺の第1項の姿勢誤差、第2項の速度誤差、第3項の位置誤差、第4項の角速度センサ誤差で線形化された。この式の導出は付録とする。

#### 8.6.4 誤差方程式のまとめ

航法座標系における姿勢誤差、速度誤差、位置誤差の方程式を一つの方程式にまとめて、

$$\dot{\delta \mathbf{x}} = \mathbf{F} \delta \mathbf{x} + \mathbf{G} \mathbf{u} \tag{8.78}$$

と表す。ここに、 $\mathbf{x}$  は状態変数、 $\mathbf{F}$  は係数行列、 $\mathbf{u}$  はシステムノイズ行列、 $\mathbf{G}$  はシステムノイズの換算行列である。この式はカルマンフィルタのシステム方程式となる。状態変数  $\mathbf{x}$  は姿勢ベクトル  $\boldsymbol{\phi}$ 、速度ベクトル  $\delta \mathbf{v}$ 、位置ベクトル  $\delta \mathbf{r}$  の3個のベクトルを縦に並べた9行ベクトルとする。すなわち、

$$\delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \delta \mathbf{v} \\ \delta \mathbf{r} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \delta v_N \\ \delta v_E \\ \delta v_D \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \delta \lambda \\ \delta \mu \\ \delta h \end{bmatrix} \tag{8.79}$$

システムノイズ行列  $\mathbf{u}$  は角速度センサ誤差ベクトル  $\delta \boldsymbol{\omega}^b$ 、加速度センサ誤差ベクトル  $\delta \mathbf{f}^b$  の2個のベクトルを縦に並べた6行ベクトルとする。すなわち、

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\omega}^b \\ \delta \mathbf{f}^b \end{bmatrix}, \quad \delta \boldsymbol{\omega}^b = \begin{bmatrix} \delta \omega_x^b \\ \delta \omega_y^b \\ \delta \omega_z^b \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{f}^b = \begin{bmatrix} \delta f_x^b \\ \delta f_y^b \\ \delta f_z^b \end{bmatrix} \quad (8.80)$$

ベクトルと行列で表した姿勢誤差方程式 (8.77), 速度誤差方程式 (8.58), 位置誤差方程式 (8.50) を式 (8.78) に当てはめると,

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\phi}} \\ \delta \dot{\mathbf{v}} \\ \delta \dot{\mathbf{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} & \mathbf{F}_{13} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} & \mathbf{F}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{32} & \mathbf{F}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \delta \mathbf{v} \\ \delta \mathbf{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_b^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_b^n \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\omega}^b \\ \delta \mathbf{f}^b \end{bmatrix} \quad (8.81)$$

となる。ここに、 $\mathbf{F}_{ij}$  は 3 行 3 列の正方行列であり、以下の通りである。

$$\mathbf{F}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega \sin \lambda - \frac{v_E \tan \lambda}{R+h} & \frac{v_N}{R+h} \\ \Omega \sin \lambda + \frac{v_E \tan \lambda}{R+h} & 0 & \Omega \cos \lambda + \frac{v_E}{R+h} \\ -\frac{v_N}{R+h} & -\Omega \cos \lambda - \frac{v_E}{R+h} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R+h} & 0 \\ -\frac{1}{R+h} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\tan \lambda}{R+h} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{13} = \begin{bmatrix} -\Omega \sin \lambda & 0 & -\frac{v_E}{(R+h)^2} \\ 0 & 0 & \frac{v_N}{(R+h)^2} \\ -\Omega \cos \lambda - \frac{v_E}{(R+h) \cos^2 \lambda} & 0 & \frac{v_E \tan \lambda}{(R+h)^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -f_D^n & f_E^n \\ f_D^n & 0 & -f_N^n \\ -f_E^n & f_N^n & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{22} = \begin{bmatrix} \frac{v_D}{R+h} & -2\Omega \sin \lambda - \frac{2v_E \tan \lambda}{R+h} & \frac{v_N}{R+h} \\ 2\Omega \sin \lambda + \frac{v_E \tan \lambda}{R+h} & \frac{v_D}{R+h} + \frac{v_N \tan \lambda}{R+h} & 2\Omega \cos \lambda + \frac{v_E}{R+h} \\ -\frac{2v_N}{R+h} & -2\Omega \cos \lambda - \frac{2v_E}{R+h} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{23} = \begin{bmatrix} -2v_E \Omega \cos \lambda - \frac{v_E^2}{(R+h) \cos^2 \lambda} & 0 & -\frac{v_N v_D}{(R+h)^2} + \frac{v_E^2 \tan \lambda}{(R+h)^2} \\ -2v_D \Omega \sin \lambda + 2v_N \Omega \cos \lambda + \frac{v_N v_E}{(R+h) \cos^2 \lambda} & 0 & -\frac{v_E v_D}{(R+h)^2} - \frac{v_N v_E \tan \lambda}{(R+h)^2} \\ 2v_E \Omega \sin \lambda & 0 & \frac{v_E^2}{(R+h)^2} + \frac{v_N^2}{(R+h)^2} - \frac{2g}{R} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{32} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R+h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(R+h) \cos \lambda} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{v_N}{(R+h)^2} \\ \frac{v_E \tan \lambda}{(R+h) \cos \lambda} & 0 & -\frac{v_E}{(R+h)^2 \cos \lambda} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*Note*

誤差方程式 (8.79) の状態変数は、上から姿勢誤差、速度誤差、位置誤差の順であるが、文献によっては、逆に上から位置誤差、速度誤差、姿勢誤差の順とすることも少なくない。その場合、部分行列  $\mathbf{F}_{ij}$  の定義はそのままとして、誤差方程式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \delta \ddot{\mathbf{r}} \\ \delta \ddot{\mathbf{v}} \\ \delta \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{33} & \mathbf{F}_{32} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{23} & \mathbf{F}_{22} & \mathbf{F}_{21} \\ \mathbf{F}_{13} & \mathbf{F}_{12} & \mathbf{F}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r} \\ \delta \mathbf{v} \\ \delta \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_b^n \\ -\mathbf{C}_b^n & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\omega}^b \\ \delta \mathbf{x}^b \end{bmatrix}$$

誤差方程式 (8.81) の姿勢誤差  $\boldsymbol{\phi}$  の代わりにクォータニオン縮減誤差  $\delta \mathbf{q}^n$  を使う場合を考える。式 (5.107) より、

$$\delta \mathbf{q}^n = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}$$

であるから、 $\boldsymbol{\varphi} = 2\delta \mathbf{q}^n$  を式 (8.81) に代入すると、

$$\begin{bmatrix} 2\delta \dot{\mathbf{q}}^n \\ \delta \dot{\mathbf{v}} \\ \delta \dot{\mathbf{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} & \mathbf{F}_{13} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} & \mathbf{F}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{32} & \mathbf{F}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\delta \mathbf{q}^n \\ \delta \mathbf{v} \\ \delta \mathbf{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_b^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_b^n \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\omega}^b \\ \delta \mathbf{f}^b \end{bmatrix}$$

となる。状態変数の中の 2 が消えるように書き直すと、

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{\mathbf{q}}^n \\ \delta \dot{\mathbf{v}} \\ \delta \dot{\mathbf{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \frac{1}{2}\mathbf{F}_{12} & \frac{1}{2}\mathbf{F}_{13} \\ 2\mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} & \mathbf{F}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{32} & \mathbf{F}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q}^n \\ \delta \mathbf{v} \\ \delta \mathbf{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\mathbf{C}_b^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_b^n \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\omega}^b \\ \delta \mathbf{f}^b \end{bmatrix} \quad (8.82)$$

となる。次の第 9 章ではこの誤差方程式を利用する。

### 問題

問題 8.1 航法座標系の速度方程式 (8.44-2) を用いて、機体座標系における見かけの力（コリオリ力と遠心力）の加速度を求めよ。計算の簡略化のため、機体のロール角とピッチ角はともに 0 deg（機体は傾かない）、横滑り角は 0 deg（機体の進行方向と方位角は同じ）、鉛直方向の速度  $v_D$  は 0 m/s（機体の高度は一定）であると仮定する。

### 参考文献

- 1) D. H. Titterton, Strapdown Inertial Navigation Technology, 2<sup>nd</sup> Edition, AIAA, 2004
- 2) R. M. Rogers, Applied Mathematics in Integrated Navigation Systems, 3<sup>rd</sup> Edition, AIAA, 2007
- 3) J. A. Farrell, M. Barth, The Global Positioning System & Inertial Navigation, McGraw-Hill, 1998