

5 姿勢

5.1 姿勢の表現

慣性計測技術における姿勢とは、機体座標系 (body frame) と航法座標系 (navigation frame) の関係を定量的に表すものである。移動体の姿勢を表現する最も代表的な方法を表 5.1 に示す。

表 5.1 姿勢の表現方法

日本語名称	英語名称	記号
方向余弦行列	direction cosine matrix (DCM)	\mathbf{C}
オイラー角	Euler angle	φ, θ, ψ
クォータニオン, 四元数	quaternion	q

以下, 図 5.1 に示すように, それぞれの表現方法と, 相互の変換方法について記す。

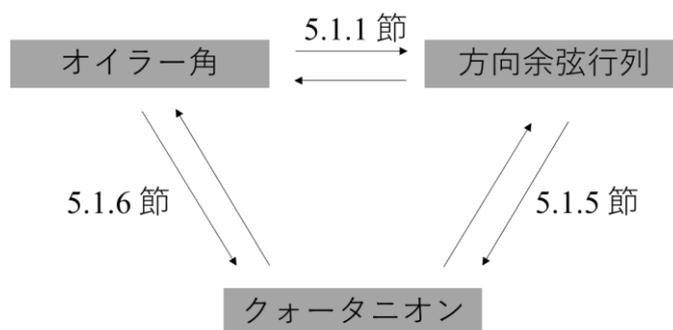


図 5.1 姿勢の表現の変換

5.1.1 方向余弦行列とオイラー角

方向余弦行列については第 3 章に記した。機体座標系から航法座標系への方向余弦行列を,

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

とする。記号 \mathbf{C} の右側の添え字は, 右下の添え字 b の機体座標系から, 右上の添え字 n の航法座標系への方向余弦行列であることを示す。記号の煩雑を防ぐため, 行列の要素 c_{ij} に

は座標系の添え字は付けないことが多い。本書においても、式 (5.1) のように定義することとし、各要素に対する座標系の添え字は省略する。方向余弦行列は 3 行 3 列の直交行列の一種であり、2.8 節に記した関係がある。

機体座標系の x 軸, y 軸, z 軸の単位ベクトルを $\mathbf{i}_b, \mathbf{j}_b, \mathbf{k}_b$ とする。同じ機体座標系からこの単位ベクトルを要素で表示すると、当然のことながら、

$$\mathbf{i}_b^b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j}_b^b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_b^b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

である。右上の添え字 b は機体座標系から見た座標であることを示している。同じ単位ベクトルを航法座標系で表わすと、

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_b^n &= \mathbf{C}_b^n \mathbf{i}_b^b = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix} \\ \mathbf{j}_b^n &= \mathbf{C}_b^n \mathbf{j}_b^b = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{bmatrix} \\ \mathbf{k}_b^n &= \mathbf{C}_b^n \mathbf{k}_b^b = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。すなわち、新たな航法座標系で表わした $\mathbf{i}_b^n, \mathbf{j}_b^n, \mathbf{k}_b^n$ ベクトルと、方向余弦行列 \mathbf{C}_b^n の第 1 列, 第 2 列, 第 3 列がそれぞれ一致する。したがって、方向余弦行列は、座標系の単位ベクトルを横に並べて、姿勢を表現しているものと見ることができる。

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_b^n & \mathbf{j}_b^n & \mathbf{k}_b^n \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

同様に、航法座標系の単位ベクトルを $\mathbf{i}_n, \mathbf{j}_n, \mathbf{k}_n$ とすると、

$$\mathbf{C}_n^b = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_n^b & \mathbf{j}_n^b & \mathbf{k}_n^b \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

と表すことができる。まとめると表 5.2 のように、方向余弦行列 \mathbf{C}_n^b は機体座標系が回転したときに航法座標系の単位ベクトルが機体座標系でどう表されるかを示している。方向余

弦行列 \mathbf{C}_b^n は機体座標系が回転したときに機体座標系の単位ベクトルが航法座標系でどう表されるかを示している。

表 5.2 方向余弦行列と基準座標系

基準座標系	方向余弦行列と単位ベクトル
機体座標系 (動座標系)	$\mathbf{C}_n^b = [\mathbf{i}_n^b \quad \mathbf{j}_n^b \quad \mathbf{k}_n^b]$
航法座標系 (固定座標系)	$\mathbf{C}_b^n = [\mathbf{i}_b^n \quad \mathbf{j}_b^n \quad \mathbf{k}_b^n]$

オイラー角, すなわちロール角 φ , ピッチ角 θ , 方位角 ψ による姿勢の表現については第3章に記した。オイラー角と方向余弦行列の関係は, 式 (3.8) より,

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & -\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\sin\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\sin\theta\cos\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\theta\sin\psi & -\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\theta\sin\psi \\ -\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

である。この式を使ってオイラー角から方向余弦行列を計算することができる。

この方向余弦行列の第1列と第3行に着目すると,

$$\left. \begin{aligned} \frac{c_{32}}{c_{33}} &= \frac{\sin\varphi\cos\theta}{\cos\varphi\cos\theta} = \tan\varphi \\ -c_{31} &= \sin\theta \\ \frac{c_{21}}{c_{11}} &= \frac{\cos\theta\sin\psi}{\cos\theta\cos\psi} = \tan\psi \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

となる。したがって,

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \tan^{-1} \frac{c_{32}}{c_{33}} \\ \theta &= -\sin^{-1} c_{31} \\ \psi &= \tan^{-1} \frac{c_{21}}{c_{11}} \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

となる。この式を使って逆に方向余弦行列からオイラー角を計算することができる。

5.1.2 クォータニオン

オイラー角では、座標軸まわりに座標系を回転することを3回行って、もとの座標系から新たな座標系への座標変換を行った。これに対して、クォータニオンでは、単位長さの回転軸を1個決めて、その回転軸まわりにもとの座標系を1回だけ回転することにより、新たな座標系への座標変換を行う。クォータニオン q は四元数ともいわれ、 q_0, q_1, q_2, q_3 の4個の要素からなる。

$$q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

ここに、記号 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は基準とする座標系の x, y, z 軸の単位ベクトルである。

Note

クォータニオンは、要素の順序を $0, 1, 2, 3$ から $1, 2, 3, 0$ に変えて、 $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_0 \end{bmatrix}$ と表す流儀もある。順序が変わるだけであるが、公式の形は異なってくるから、どちらの流儀なのか注意する必要がある。

複素数は、 $z = x + yi$ のように、実部 x と虚部 yi の和の形で表されるが、クォータニオンでは、虚部が $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ の3個となっている。クォータニオンの虚部をベクトル \mathbf{q} で表わすと、

$$\mathbf{q} = q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

となる。したがって、クォータニオン q は次のようにも表される。

$$q = q_0 + \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

クォータニオン $p = \begin{bmatrix} p_0 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}$ と $q = \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}$ との積は次のように定義されている。

$$p \otimes q = p_0 q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + p_0 \mathbf{q} + q_0 \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \quad (5.10)$$

ここに、左辺のクォータニオン積は単に pq と表わすことも多いが、クォータニオンに特別に定義された積であること強調するため、記号 $p \otimes q$ で表した。右辺の第1項は実部同士の積、第2項は虚部のベクトル同士の内積、第3項と第4項は実部と虚部との積、第5項は虚部のベクトル同士の外積である。積の順序を交換すると、

$$\begin{aligned} q \otimes p &= q_0 p_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} + q_0 \mathbf{p} + p_0 \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{p} \\ &= p_0 q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + p_0 \mathbf{q} + q_0 \mathbf{p} - \mathbf{p} \times \mathbf{q} \end{aligned} \quad (5.11)$$

となる。右辺の各項の符号のうち、第5項の外積の符号が変わるから、クォータニオンの積は交換則が成り立たない。

式 (5.10) を行列表示するために変形する。ベクトル同士の内積 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$ は $\mathbf{p}^T \mathbf{q}$ と表される。ベクトル同士の外積 $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ は、3行3列の外積行列 $(\mathbf{p} \times)$ を使って $(\mathbf{p} \times) \mathbf{q}$ と表される。これらの関係を用いると、式 (5.10) は次のように表すことができる。

$$p \otimes q = \begin{bmatrix} p_0 & -\mathbf{p}^T \\ \mathbf{p} & p_0 \mathbf{I} + (\mathbf{p} \times) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

ここに、虚部のベクトル \mathbf{p}, \mathbf{q} は、

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

であるから、式 (5.12) の右辺左側の行列の中の各要素は、

$$\begin{aligned}
 -\mathbf{p}^T &= -[p_1 \ p_2 \ p_3] = [-p_1 \ -p_2 \ -p_3] \\
 p_0 \mathbf{I} &= p_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 & 0 & 0 \\ 0 & p_0 & 0 \\ 0 & 0 & p_0 \end{bmatrix} \\
 (\mathbf{p} \times) &= \begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

となる。これらの式を式 (5.12) に代入すると、

$$p \otimes q = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

となる。クォータニオンの積が、通常の行列とベクトルとの積で表現できた。

単位ベクトルのクォータニオン積を計算すると、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i} \otimes \mathbf{i} &= -1 \\ \mathbf{j} \otimes \mathbf{j} &= -1 \\ \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} &= -1 \end{aligned} \right\} \tag{5.16}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i} \otimes \mathbf{j} &= \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \otimes \mathbf{i} = -\mathbf{k} \\ \mathbf{j} \otimes \mathbf{k} &= \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \otimes \mathbf{j} = -\mathbf{i} \\ \mathbf{k} \otimes \mathbf{i} &= \mathbf{j}, \quad \mathbf{i} \otimes \mathbf{k} = -\mathbf{j} \end{aligned} \right\} \tag{5.17}$$

となる。式 (5.16) は、複素数の虚数 i を自乗すると実数の -1 となる関係に相当する。式 (5.17) は、右ねじ系の座標系における単位ベクトルの外積の関係に相当する。(問題 5.1, 問題 5.2 参照)

クォータニオンの虚部 \mathbf{p} の符号を変えたものを共役クォータニオンと言い、記号 p^* で表す。

$$p^* = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 \\ -p_1 \\ -p_2 \\ -p_3 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

複素数 $z=x+yi$ の虚部の符号を変えた $z^*=x-yi$ を共役複素数と言うことに相当する.

クォータニオンと共役クォータニオンの積を計算すると,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} q_0 \\ -\mathbf{q} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q}^T \\ \mathbf{q} & q_0\mathbf{I}+(\mathbf{q}\times) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ -\mathbf{q} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q_0q_0 + \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{q} \\ q_0\mathbf{q} - q_0\mathbf{q} - (\mathbf{q}\times\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0^2 + \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{q} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.19)$$

となり, 実部のみとなる. この2行目の式において, 同じベクトル同士の外積 $\mathbf{q}\times\mathbf{q}$ は $\mathbf{0}$ となることを使った. この実部の平方根をクォータニオンのノルム, または長さと言い, 記号 $|q|$ で表す.

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \quad (5.20)$$

この式を式 (5.19) に代入すると,

$$\begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} q_0 \\ -\mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |q|^2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = |q|^2 \quad (5.21)$$

と表される. ここで, 逆クォータニオン q^{-1} を,

$$q^{-1} = \frac{1}{|q|^2} \begin{bmatrix} q_0 \\ -\mathbf{q} \end{bmatrix} = \frac{q^*}{|q|^2} \quad (5.22)$$

と定義すると, $q\otimes q^{-1}=1$ となる.

5.1.3 位置ベクトルの回転のクォータニオン

直交座標系において，任意の単位ベクトル \mathbf{u} を回転軸として，任意の位置ベクトル \mathbf{v} を角度 δ だけ回転した状態を図 5.2 に示す．回転後の新たな位置ベクトルを \mathbf{w} とする．回転角度 δ の符号は，回転軸 \mathbf{u} まわりに右ねじの回転方向を正とする．

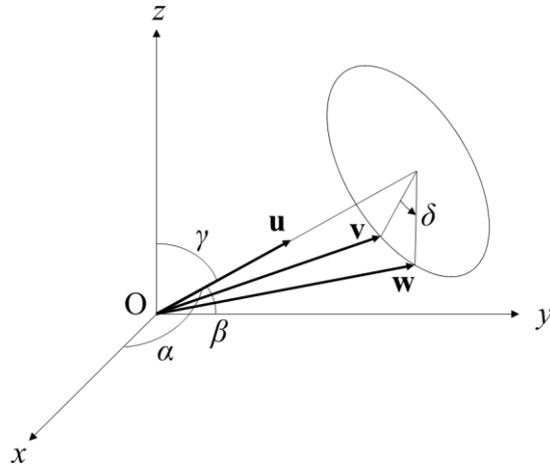


図 5.2 位置ベクトルの回転 (1)

3 個のベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ を抜き出した図を図 5.3 の左側に示す．

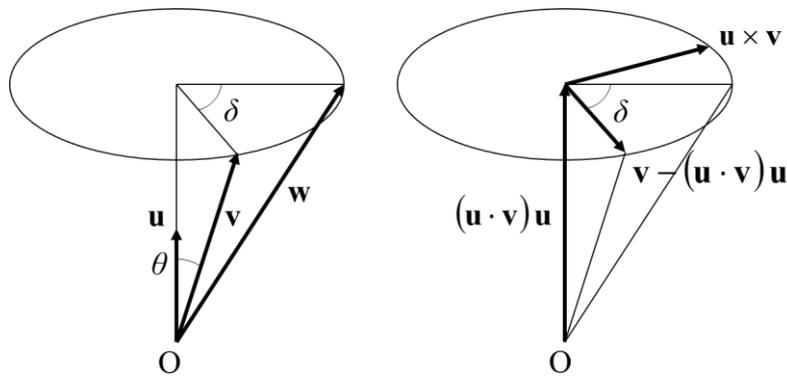


図 5.3 位置ベクトルの回転 (2)

位置ベクトル \mathbf{v} が回転軸の単位ベクトル \mathbf{u} となす角度を θ とすると，回転円の中心と原点との距離は $|\mathbf{v}| \cos\theta$ であり，回転円の半径は $|\mathbf{v}| \sin\theta$ である．位置ベクトル \mathbf{v} を斜辺とする直角三角形と，位置ベクトル \mathbf{w} を斜辺とする直角三角形は合同である．

図 5.3 の右側の図に示す 3 個のベクトルを考える。原点から回転円の中心に向かうベクトルは、方向がベクトル \mathbf{u} に等しく、長さは $|\mathbf{v}| \cos \theta$ であるから、位置ベクトル \mathbf{v} と回転軸の単位ベクトル \mathbf{u} の内積 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ を使って、 $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u}$ と表される。回転円の中心から回転前の位置に向かう半径方向のベクトルは、回転前の位置ベクトル \mathbf{v} から回転円中心のベクトル $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u}$ を引いたものであるから、 $\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u}$ と表される。回転円を含む平面上において、このベクトル $\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u}$ と直交するベクトルは、外積を使って $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ と表される。

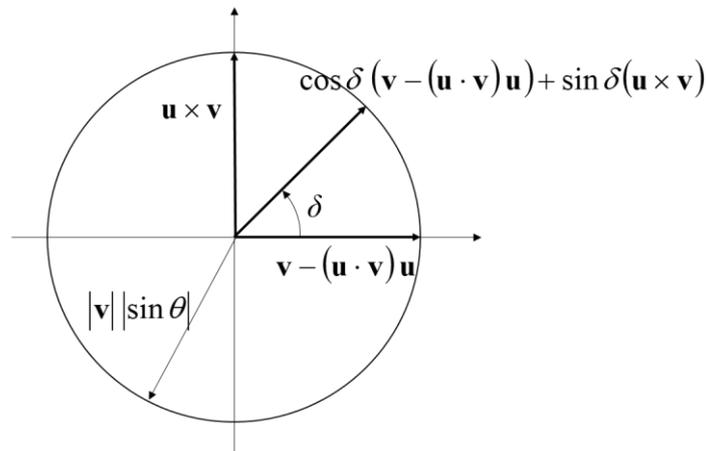


図 5.4 位置ベクトルの回転 (3)

回転円を上から見た状態を図 5.4 に示す。回転中心から回転前の位置へ向かうベクトルを横軸に、それと直交するベクトルを縦軸に示している。回転円の中心から、角度 δ だけ回転した位置に向かうベクトルは横軸上のベクトル $\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u}$ の $\cos \delta$ 倍と、縦軸上のベクトル $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ の $\sin \delta$ 倍の和となる。これに原点から回転中心に向かうベクトル $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u}$ を加えると、回転後の位置ベクトル \mathbf{w} は、

$$\mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u} + \cos \delta (\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u}) + \sin \delta (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \tag{5.23}$$

となる。この式をロドリゲの式 (またはロドリゲスの式) と言う。ロドリゲとはフランスの数学者 B. O. Rodrigues (1795 - 1851) である。ここで、三角関数の半角の公式；

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta &= 2 \cos^2 \frac{\delta}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2} \\ \sin \delta &= 2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \end{aligned} \right\}$$

を式 (5.23) に代入すると,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w} &= \cos \delta \mathbf{v} + (1 - \cos \delta)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + \sin \delta(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \\
 &= \left(2 \cos^2 \frac{\delta}{2} - 1\right) \mathbf{v} + 2 \sin^2 \frac{\delta}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + 2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \\
 &= \left(2 \cos^2 \frac{\delta}{2} - 1\right) \mathbf{v} + 2 \left(\left(\sin \frac{\delta}{2} \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{v} \right) \left(\sin \frac{\delta}{2} \mathbf{u} \right) + 2 \cos \frac{\delta}{2} \left(\left(\sin \frac{\delta}{2} \mathbf{u} \right) \times \mathbf{v} \right)
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

となる. ここで,

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= \cos \frac{\delta}{2} \\ \mathbf{q} &= \sin \frac{\delta}{2} \mathbf{u} \end{aligned} \right\} \tag{5.25}$$

とすると,

$$\mathbf{w} = (2q_0^2 - 1)\mathbf{v} + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})\mathbf{q} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{v}) \tag{5.26}$$

となる. この式はクォータニオンの積を使うと,

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{q} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{q}^* \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} q_0 \\ -\mathbf{q} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.27}$$

と表すことができる. その証明を以下に記す. 右辺の第 1 項と第 2 項の積は,

$$\begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q}^T \\ \mathbf{q} & q_0 \mathbf{I} + (\mathbf{q} \times) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{q}^T \mathbf{v} \\ q_0 \mathbf{v} + (\mathbf{q} \times) \mathbf{v} \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

となるから, 式 (5.27) は,

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{q}^T \mathbf{v} \\ q_0 \mathbf{v} + (\mathbf{q} \times) \mathbf{v} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} q_0 \\ -\mathbf{q} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\mathbf{q}^T \mathbf{v} & -q_0 \mathbf{v}^T + \mathbf{v}^T (\mathbf{q} \times) \\ q_0 \mathbf{v} + (\mathbf{q} \times) \mathbf{v} & -(\mathbf{q}^T \mathbf{v}) \mathbf{I} + q_0 (\mathbf{v} \times) + ((\mathbf{q} \times \mathbf{v}) \times) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ -\mathbf{q} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -q_0 \mathbf{q}^T \mathbf{v} + q_0 \mathbf{v}^T \mathbf{q} - \mathbf{v}^T (\mathbf{q} \times) \mathbf{q} \\ q_0^2 \mathbf{v} + q_0 (\mathbf{q} \times) \mathbf{v} + (\mathbf{q}^T \mathbf{v}) \mathbf{q} - q_0 (\mathbf{v} \times) \mathbf{q} - ((\mathbf{q} \times \mathbf{v}) \times) \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (5.29)
 \end{aligned}$$

となる。ここに、2行目の行列の右上の式に、外積行列の歪対称行列としての関係 $(\mathbf{q} \times)^T = -(\mathbf{q} \times)$ を使った。右下の式に外積の分配則を使った。ここで、3行目の実部を見ると、第1項と第2項は相殺し、第3項のなかの外積 $(\mathbf{q} \times) \mathbf{q}$ は $\mathbf{0}$ であるから、確かに実部は 0 となっている。虚部の第5項は、ベクトル三重積の公式 (2.25)；

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$$

を使うと、

$$\begin{aligned}
 -((\mathbf{q} \times \mathbf{v}) \times) \mathbf{q} &= \mathbf{q} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{v}) \\
 &= (\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{q} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) \mathbf{v} \\
 &= (\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{q} - (1 - q_0^2) \mathbf{v} \quad (5.30)
 \end{aligned}$$

となる。この3行目において、クォータニオンのノルムが1であるという関係を使った。よって、式 (5.29) の虚部は、

$$\begin{aligned}
 & q_0^2 \mathbf{v} + q_0 (\mathbf{q} \times) \mathbf{v} + (\mathbf{q}^T \mathbf{v}) \mathbf{q} - q_0 (\mathbf{v} \times) \mathbf{q} - ((\mathbf{q} \times \mathbf{v}) \times) \mathbf{q} \\
 &= q_0^2 \mathbf{v} + q_0 (\mathbf{q} \times) \mathbf{v} + (\mathbf{q}^T \mathbf{v}) \mathbf{q} + q_0 (\mathbf{q} \times) \mathbf{v} + (\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{q} - (1 - q_0^2) \mathbf{v} \\
 &= (2q_0^2 - 1) \mathbf{v} + 2q_0 (\mathbf{q} \times) \mathbf{v} + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{q} \quad (5.31)
 \end{aligned}$$

となる。以上より、式 (5.27) は、

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} q_0 \\ -\mathbf{q} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ (2q_0^2 - 1) \mathbf{v} + 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}) \mathbf{q} + 2q_0 (\mathbf{q} \times \mathbf{v}) \end{bmatrix} \quad (5.32)
 \end{aligned}$$

となる。両辺の虚部同士を取り出すと、

$$\mathbf{w} = (2q_0^2 - 1)\mathbf{v} + 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})\mathbf{q} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{v})$$

となり，式 (5.26) に一致する．任意の位置ベクトル \mathbf{v} を任意の回転軸 \mathbf{u} まわりに角度 δ だけ回転したとき，回転後の位置ベクトル \mathbf{w} がクォータニオンの積を使って式 (5.27) で表されることを証明した．

式 (5.25) より，位置ベクトルの回転のクォータニオンは，

$$q = \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\delta}{2} \\ \sin \frac{\delta}{2} \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\delta}{2} \\ \sin \frac{\delta}{2} \cos \alpha \\ \sin \frac{\delta}{2} \cos \beta \\ \sin \frac{\delta}{2} \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

となる．ここに，角度 α, β, γ は，図 5.2 に示すように，回転軸ベクトル \mathbf{u} が座標系の x, y, z 軸となす角度である．それらの余弦 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ は方向余弦と呼ばれ，

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (5.34)$$

の関係がある．この方向余弦の関係から，位置ベクトルの回転のクォータニオンのノルムは 1 となる．

$$\begin{aligned} |q|^2 &= q_0^2 + |\mathbf{q}|^2 \\ &= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \\ &= \cos^2 \frac{\delta}{2} + \sin^2 \frac{\delta}{2} (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \\ &= \cos^2 \frac{\delta}{2} + \sin^2 \frac{\delta}{2} = 1 \\ \therefore |q| &= 1 \end{aligned} \quad (5.35)$$

したがって，式 (5.22) より，位置ベクトルの回転を表すクォータニオンの逆クォータニオン q^{-1} は共役クォータニオン q^* に等しいことがわかる．

5.1.4 座標系の回転のクォータニオン

航法座標系に対して、機体座標系が単位ベクトル \mathbf{u} を回転軸として角度 δ の回転をする模式図を図 5.5 に示す。

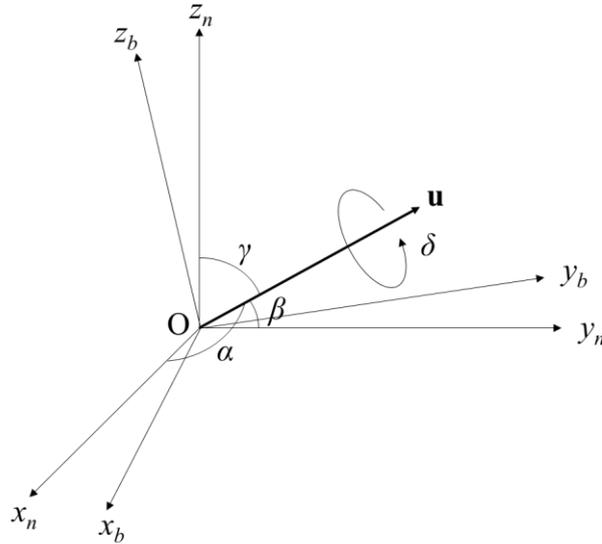


図 5.5 機体座標系の回転

この回転による座標変換は、前節の位置ベクトルの回転に対する式がそのまま適用できる。機体座標系の回転によって、機体座標系のベクトル \mathbf{v}^b が航法座標系から見るとベクトル \mathbf{v}^n となることをクォータニオンの積を使って表すと、式 (5.27) より、

$$\mathbf{v}^n = \mathbf{q} \otimes \mathbf{v}^b \otimes \mathbf{q}^* \quad (5.36)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}^b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} q_0 \\ -\mathbf{q} \end{bmatrix}$$

となる。ベクトルを使って表すと、式 (5.26) より、

$$\mathbf{v}^n = (2q_0^2 - 1)\mathbf{v}^b + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}^b)\mathbf{q} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{v}^b) \quad (5.37)$$

となる。

次に、機体座標系が回転したときに、航法座標系のベクトルが機体座標系から見るとどのように表されるかを考える。この問題は式 (5.36) の場合と視点が逆になることから、回

転角度 δ の符号が変わることになる. 式 (5.36) の虚部 \mathbf{q} の符号を変えて, 右辺の右側がクォータニオン q , 左側が共役クォータニオン q^* となって,

$$\mathbf{v}^b = q^* \otimes \mathbf{v}^n \otimes q$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ -\mathbf{q} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}^n \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

となる. ベクトルを使って表すと, 虚部 \mathbf{q} の符号を変えて,

$$\mathbf{x}^b = (2q_0^2 - 1)\mathbf{x}^n + 2(\mathbf{x}^n \cdot \mathbf{q})\mathbf{q} + 2q_0(\mathbf{x}^n \times \mathbf{q}) \quad (5.39)$$

となる. この式の第1項は虚部 \mathbf{q} の符号と関係しない. 第2項は虚部 \mathbf{q} が2個あり, 符号は打ち消しあって変わらない. 第3項は符号が変わるため, 外積の順序が変わった. クォータニオンと基準座標系をまとめると表 5.3 のようになる.

表 5.3 クォータニオンと基準座標系

基準座標系	クォータニオンの演算
機体座標系 (動座標系)	$\mathbf{v}^b = q^* \otimes \mathbf{v}^n \otimes q$
航法座標系 (固定座標系)	$\mathbf{v}^n = q \otimes \mathbf{v}^b \otimes q^*$

5.1.5 クォータニオンと方向余弦行列の変換

クォータニオンを方向余弦行列に変換する式を導く. 式 (5.39) の右辺の各項のなかのベクトル \mathbf{x}^n が左側に移動するように変形する. 式 (5.39) の第1項は, 3行3列の単位行列 \mathbf{I} を使って,

$$(2q_0^2 - 1)\mathbf{x}^n = (2q_0^2 - 1)\mathbf{I}\mathbf{x}^n \quad (5.40)$$

と表される. 式 (5.39) の第2項を変形する. 記号 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を任意の3行のベクトルとすると, 式 (2.19) の関係;

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{c}\mathbf{b}^T)\mathbf{a} = (\mathbf{c}\mathbf{a}^T)\mathbf{b}$$

を使うと, 式 (5.39) の第2項は,

$$2(\mathbf{x}^n \cdot \mathbf{q})\mathbf{q} = 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T \mathbf{x}^n \quad (5.41)$$

となり，ベクトル \mathbf{x}^n を右側に移動できた．式 (5.39) の第 3 項を変形する．外積は項の順序を変えると符号が変わるから，

$$\mathbf{x}^n \times \mathbf{q} = -(\mathbf{q} \times \mathbf{x}^n) \quad (5.42)$$

となる．右辺のなかの外積は外積行列を使って表すと，

$$\mathbf{q} \times \mathbf{x}^n = (\mathbf{q} \times) \mathbf{x}^n = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^n \\ y^n \\ z^n \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

となる．よって，式 (5.39) の第 3 項は，

$$2q_0(\mathbf{x}^n \times \mathbf{q}) = -2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{x}^n) = -2q_0(\mathbf{q} \times) \mathbf{x}^n \quad (5.44)$$

となり，ベクトル \mathbf{x}^n を右側に移動できた．これらの式を式 (5.39) に代入すると，

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^b &= (2q_0^2 - 1)\mathbf{x}^n + 2(\mathbf{x}^n \cdot \mathbf{q})\mathbf{q} + 2q_0(\mathbf{x}^n \times \mathbf{q}) \\ &= (2q_0^2 - 1)\mathbf{I}\mathbf{x}^n + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T \mathbf{x}^n - 2q_0(\mathbf{q} \times) \mathbf{x}^n \\ &= ((2q_0^2 - 1)\mathbf{I} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T - 2q_0(\mathbf{q} \times)) \mathbf{x}^n \end{aligned} \quad (5.45)$$

となる．方向余弦行列とベクトルの関係は，その定義より，

$$\mathbf{x}^b = \mathbf{C}_n^b \mathbf{x}^n$$

であるから，式 (5.45) と比較すると，

$$\mathbf{C}_n^b = (2q_0^2 - 1)\mathbf{I} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T - 2q_0(\mathbf{q} \times) \quad (5.46)$$

となり，クォータニオンと方向余弦行列の関係が導かれた．

この式を要素に書き下すと実用的である．第 1 項は，

$$(2q_0^2 - 1)\mathbf{I} = (2q_0^2 - 1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2q_0^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2q_0^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2q_0^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

となる。第2項は、

$$2\mathbf{q}\mathbf{q}^T = 2 \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2q_1^2 & 2q_1q_2 & 2q_1q_3 \\ 2q_1q_2 & 2q_2^2 & 2q_2q_3 \\ 2q_1q_3 & 2q_2q_3 & 2q_3^2 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

となる。第3項は、

$$-2q_0(\mathbf{q} \times) = -2q_0 \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2q_0q_3 & -2q_0q_2 \\ -2q_0q_3 & 0 & 2q_0q_1 \\ 2q_0q_2 & -2q_0q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

となる。これらの式を式 (5.46) に代入すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_n^b &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = (2q_0^2 - 1)\mathbf{I} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T - 2q_0(\mathbf{q} \times) \\ &= \begin{bmatrix} 2q_0^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2q_0^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2q_0^2 - 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2q_1^2 & 2q_1q_2 & 2q_1q_3 \\ 2q_1q_2 & 2q_2^2 & 2q_2q_3 \\ 2q_1q_3 & 2q_2q_3 & 2q_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2q_0q_3 & -2q_0q_2 \\ -2q_0q_3 & 0 & 2q_0q_1 \\ 2q_0q_2 & -2q_0q_1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2q_0^2 - 1 + 2q_1^2 & 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & 2q_1q_3 - 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_0^2 - 1 + 2q_2^2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 + 2q_0q_2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 & 2q_0^2 - 1 + 2q_3^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.50)$$

となる。最後の行の対角要素の計算には、ノルムの関係式 (5.35) を使った。この式を使ってクォータニオンから、航法座標系から機体座標系への方向余弦行列を計算することができる。逆に機体座標系から航法座標系への方向余弦行列は、この式の転置行列となる。

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

ここで、 q_1, q_2, q_3 に $-q_1, -q_2, -q_3$ を代入すると、転置前の式 (5.50) に一致する。クォータニオン q と共役クォータニオン q^* との関係は、方向余弦行列とその転置行列との関係に相当していることがわかる。

次に、方向余弦行列からクォータニオンを計算する式を導く。方向余弦行列の中の3個の対角要素を足すと、

$$\begin{aligned} c_{11} + c_{22} + c_{33} &= (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) + (q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2) + (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) \\ &= 3q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 \\ &= 4q_0^2 - (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) \\ &= 4q_0^2 - 1 \end{aligned} \quad (5.52)$$

となる。右辺は q_0 だけの式であり、 q_0 について解くと、

$$\begin{aligned} q_0^2 &= \frac{1 + c_{11} + c_{22} + c_{33}}{4} \\ \therefore q_0 &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + c_{11} + c_{22} + c_{33}} \end{aligned} \quad (5.53)$$

となる。2行目の式で平方根を求めるにあたって、正值を解とした。 $q_0 = \cos \frac{\delta}{2}$ の定義において、回転角 δ の範囲は一周分の $-180^\circ \leq \delta \leq 180^\circ$ であるから、その半角の範囲は $-90^\circ \leq \frac{\delta}{2} \leq 90^\circ$ となる。したがって、その余弦の $q_0 = \cos \frac{\delta}{2}$ は正または零となるからである。式 (5.51) の対角要素を挟んで対称な位置にある要素同士の差をとると、

$$\left. \begin{aligned} c_{32} - c_{23} &= 2(q_2q_3 + q_0q_1) - 2(q_2q_3 - q_0q_1) = 4q_0q_1 \\ c_{13} - c_{31} &= 2(q_1q_3 + q_0q_2) - 2(q_1q_3 - q_0q_2) = 4q_0q_2 \\ c_{21} - c_{12} &= 2(q_1q_2 + q_0q_3) - 2(q_1q_2 - q_0q_3) = 4q_0q_3 \end{aligned} \right\} \quad (5.54)$$

となる。これらの式より、

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + c_{11} + c_{22} + c_{33}} \\ q_1 &= \frac{c_{32} - c_{23}}{4q_0}, \quad q_2 = \frac{c_{13} - c_{31}}{4q_0}, \quad q_3 = \frac{c_{21} - c_{12}}{4q_0} \end{aligned} \right\} \quad (5.55)$$

となる。この式を使って方向余弦行列からクォータニオンを計算することができる。この式を見ると、方向余弦行列を転置するとクォータニオンの q_0 は変わらず、 q_1, q_2, q_3 は符号が変わること、すなわち共役クォータニオンとなることがわかる。

5.1.6 クォータニオンとオイラー角の変換

方向余弦行列をオイラー角で表した式 (5.4) とクォータニオンで表した式 (5.51) を並べると、

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\psi & -\cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \sin\theta \cos\psi & \sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \sin\theta \cos\psi \\ \cos\theta \sin\psi & \cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\theta \sin\psi & -\sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \sin\theta \sin\psi \\ -\sin\theta & \sin\varphi \cos\theta & \cos\varphi \cos\theta \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

となる。ここで、式 (5.6) を使うと、

$$\left. \begin{aligned} \tan\varphi &= \frac{c_{32}}{c_{33}} = \frac{2(q_2q_3 + q_0q_1)}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2} \\ \sin\theta &= -c_{31} = -2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ \tan\psi &= \frac{c_{21}}{c_{11}} = \frac{2(q_1q_2 + q_0q_3)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.57)$$

となるから、

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \tan^{-1} \left(\frac{2(q_2 q_3 + q_0 q_1)}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2} \right) \\ \theta &= -\sin^{-1} (2(q_1 q_3 - q_0 q_2)) \\ \psi &= \tan^{-1} \left(\frac{2(q_1 q_2 + q_0 q_3)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.58)$$

となる。この式を使ってクォータニオンからオイラー角を計算することができる。

逆にオイラー角からクォータニオンを計算する式を記す。クォータニオン p, q, r の順に位置ベクトルの回転を3回行う場合を考えると、式 (5.27) の座標変換が3重となって、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^b &= (q_z \otimes (q_y \otimes (q_x \otimes \mathbf{x}^n \otimes q_x^*) \otimes q_y^*) \otimes q_z^*) \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x}^b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} p_{z0} \\ \mathbf{p}_z \end{bmatrix} \otimes \left(\begin{bmatrix} p_{z0} \\ \mathbf{p}_y \end{bmatrix} \otimes \left(\begin{bmatrix} p_{x0} \\ \mathbf{p}_x \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x}^n \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} p_{x0} \\ -\mathbf{p}_x \end{bmatrix} \right) \otimes \begin{bmatrix} p_{y0} \\ -\mathbf{p}_y \end{bmatrix} \right) \otimes \begin{bmatrix} p_{z0} \\ -\mathbf{p}_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_{z0} \\ \mathbf{p}_z \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} p_{y0} \\ \mathbf{p}_y \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} p_{x0} \\ \mathbf{p}_x \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x}^n \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} p_{x0} \\ -\mathbf{p}_x \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} p_{y0} \\ -\mathbf{p}_y \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} p_{z0} \\ -\mathbf{p}_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.59)$$

と表される。ここで、第1のクォータニオン p_x を航法座標系の x_n 軸まわりの角度 φ の回転、第2のクォータニオン p_y を航法座標系の y_n 軸まわりの角度 θ の回転、第3のクォータニオン p_z を航法座標系の z_n 軸まわりの角度 ψ の回転とすると、

$$p_x = \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \\ \mathbf{i} \sin \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix}, \quad p_y = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \mathbf{j} \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \quad p_z = \begin{bmatrix} \cos \frac{\psi}{2} \\ \mathbf{k} \sin \frac{\psi}{2} \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

となる。この式を式 (5.59) に代入して、クォータニオンの積を計算すると、

$$\left. \begin{aligned}
 q_0 &= \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\
 q_1 &= \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\
 q_2 &= \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\
 q_3 &= \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2}
 \end{aligned} \right\} \quad (5.61)$$

となる。この式を使ってオイラー角からクォータニオンを計算することができる。(問題 5.3 参照)

5.1.7 変換式のまとめ

以上で、方向余弦行列、オイラー角、クォータニオンの3者を相互に変換できる計算式がそろった。そのまとめを表 5.4 に示す。この3者の相互の変換は、慣性計測装置のアルゴリズムの色々な場面で使い分けられる。特に、慣性計測装置のカルマンフィルタにおいては方向余弦行列とクォータニオンがともに中心的な役割を担う。オイラー角は特異点があると言う短所はあるが、変数が最も少なく、感覚的に理解しやすいという長所から、慣性計測装置の入出力に欠かせない役割を果たす。

表 5.4 姿勢表現の変換公式

from	to	変換公式
Euler	DCM	$\mathbf{C}_b^n = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & -\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\sin\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\psi + \cos\phi\sin\theta\cos\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\theta\sin\psi & -\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\theta\sin\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}$
DCM	Euler	$\phi = \tan^{-1} \frac{c_{32}}{c_{33}}, \quad \theta = -\sin^{-1} c_{31}, \quad \psi = \tan^{-1} \frac{c_{21}}{c_{11}}$
q	DCM	$\mathbf{C}_b^n = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$
DCM	q	$q_0 = \frac{1}{2} \sqrt{1 + c_{11} + c_{22} + c_{33}}$ $q_1 = \frac{c_{32} - c_{23}}{4q_0}, \quad q_2 = \frac{c_{13} - c_{31}}{4q_0}, \quad q_3 = \frac{c_{21} - c_{12}}{4q_0}$
q	Euler	$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{2(q_2q_3 + q_0q_1)}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2} \right)$ $\theta = -\sin^{-1} (2(q_1q_3 - q_0q_2))$ $\psi = \tan^{-1} \left(\frac{2(q_1q_2 + q_0q_3)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} \right)$
Euler	q	$q_0 = \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2}$ $q_1 = \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2}$ $q_2 = \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2}$ $q_3 = \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2}$