

9 慣性航法装置のカルマンフィルタ

第7章の離散過程の拡張カルマンフィルタのアルゴリズムに、第8章の慣性航法の運動方程式を適用する。慣性センサのノイズは最も簡単なホワイトノイズであるとする。

9.1 システム方程式

システム方程式は式 (7.41) より、

$$\delta \mathbf{x}_k = \mathbf{\Phi}_{k-1} \delta \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{\Gamma}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}, \quad \mathbf{w}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k)$$

である。姿勢誤差ベクトル、速度誤差ベクトル、位置誤差ベクトルの3個のベクトルを上から縦に並べたベクトルを状態変数とする。姿勢誤差としてクォータニオン縮減誤差を使う場合のシステム方程式は第8章の式 (8.85) である。

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{q}^n \\ \delta \mathbf{v} \\ \delta \mathbf{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \frac{1}{2} \mathbf{F}_{12} & \frac{1}{2} \mathbf{F}_{13} \\ 2\mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} & \mathbf{F}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{32} & \mathbf{F}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q}^n \\ \delta \mathbf{v} \\ \delta \mathbf{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \mathbf{C}_b^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_b^n \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\omega}^b \\ \delta \mathbf{f}^b \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

拡張カルマンフィルタのシステム方程式 (7.41) と変数を対応させると、

$$\delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q}^n \\ \delta \mathbf{v} \\ \delta \mathbf{r} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Phi} = \mathbf{I} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \frac{1}{2} \mathbf{F}_{12} & \frac{1}{2} \mathbf{F}_{13} \\ 2\mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} & \mathbf{F}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{32} & \mathbf{F}_{33} \end{bmatrix} \Delta t, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \mathbf{C}_b^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_b^n \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\omega}^b \\ \delta \mathbf{f}^b \end{bmatrix} \Delta t \quad (9.2)$$

となる。状態変数 \mathbf{x} は9行ベクトル、推移行列 $\mathbf{\Phi}$ は9行9列の行列である。システムノイズ \mathbf{w} は9行6列の行列と6行ベクトルの積であるから9行ベクトルである。

9.2 時間更新

時間更新は式 (7.43) と式 (7.44) を使って計算できる。状態変数 \mathbf{x} の初期値、共分散行列 \mathbf{P} の初期値は既知とする。

9.2.1 姿勢の時間更新

航法座標系に対する運動角速度は、式 (8.47) より、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{nb}^b &= \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\omega}_{in}^b \\ &= \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \mathbf{C}_n^b (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n)\end{aligned}\quad (9.3)$$

である。ここに、 \mathbf{C}_n^b は航法座標系から機体座標系への方向余弦行列であり、

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}\quad (9.4)$$

の転置行列である。 $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$ と $\boldsymbol{\omega}_{en}^n$ はそれぞれ、航法座標系から見た地球の自転角速度と移動角速度であり、式 (4.39) と式 (8.37) より、

$$\boldsymbol{\omega}_{in}^n = \begin{bmatrix} \Omega \cos \lambda \\ 0 \\ -\Omega \sin \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_N \\ 0 \\ \Omega_D \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{bmatrix} \dot{\mu} \cos \lambda \\ -\dot{\lambda} \\ -\dot{\mu} \sin \lambda \end{bmatrix}\quad (9.5)$$

である。式 (9.3) を行列で表すと、

$$\begin{bmatrix} \omega_x^b \\ \omega_y^b \\ \omega_z^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x^b \\ \omega_y^b \\ \omega_z^b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_N + \dot{\mu} \cos \lambda \\ -\dot{\lambda} \\ \Omega_D - \dot{\mu} \sin \lambda \end{bmatrix}\quad (9.6)$$

となる。この式で求めた運動角速度を使って、クォータニオンを時間更新する。移動体が低速の場合、移動角速度 $\boldsymbol{\omega}_{en}^n$ は無視できる。クォータニオンの時間微分の式 (5.86) を使って時間積分すると、

$$\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}_{k(-)} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}_{k-1(+)} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x^b & -\omega_y^b & -\omega_z^b \\ \omega_x^b & 0 & \omega_z^b & -\omega_y^b \\ \omega_y^b & -\omega_z^b & 0 & \omega_x^b \\ \omega_z^b & \omega_y^b & -\omega_x^b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}_{k-1(+)}\quad (9.7)$$

となる。ここに、 Δt は時間更新の時間間隔である。

このような時間積分を数多く繰り返していくと、クォータニオンのノルムは1であるという関係がやがて崩れてくる。そこで適当なタイミングで、クォータニオンをノルムで割って正規化する。

$$q_{normalized} = \frac{q}{|q|} = \frac{q}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_0^2}} \quad (9.8)$$

正規化の別の方法を次に記す。ノルムの1からのずれを Δq と定義する。

$$\Delta q = 1 - (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_0^2) \quad (9.9)$$

この式を式 (9.8) に代入すると、

$$q_{normalized} = \frac{q}{\sqrt{1 - \Delta q}} = (1 - \Delta q)^{-\frac{1}{2}} q \quad (9.10)$$

となる。したがって、 Δq が小さければ、

$$q_{normalized} = \left(1 + \frac{1}{2} \Delta q\right) q \quad (9.11)$$

と近似できる。式 (9.8)、式 (9.11) のいずれの式を使ってもよい。

Note

クォータニオンを q_1, q_2, q_3, q_0 の順に並べる流儀の場合、式(9.7) は次式のようにになる。

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_0 \end{bmatrix}_{k(-)} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_0 \end{bmatrix}_{k-1(+)} - \frac{\Delta t}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z^b & \omega_y^b & -\omega_x^b \\ \omega_z^b & 0 & -\omega_x^b & -\omega_y^b \\ -\omega_y^b & \omega_x^b & 0 & -\omega_z^b \\ \omega_x^b & \omega_y^b & \omega_z^b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_0 \end{bmatrix}_{k-1(+)}$$

9.2.2 速度の時間更新

機体に固定された加速度センサの出力を，方向余弦行列を使って航法座標系における加速度に変換する．

$$\mathbf{f}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b, \quad \begin{bmatrix} f_x^n \\ f_y^n \\ f_z^n \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} f_x^b \\ f_y^b \\ f_z^b \end{bmatrix}_k \quad (9.12)$$

求めた加速度から，地球の重力加速度成分，コリオリの加速度成分，遠心加速度成分を引いて運動加速度を求める．

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^n &= \mathbf{f}^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}_{eb}^n - \mathbf{g}^n \\ \therefore \begin{bmatrix} a_x^n \\ a_y^n \\ a_z^n \end{bmatrix}_k &= \begin{bmatrix} f_x^n \\ f_y^n \\ f_z^n \end{bmatrix}_k - \begin{bmatrix} 2\Omega_N + \dot{\mu} \cos \lambda \\ -\dot{\lambda} \\ -2\Omega_D - \dot{\mu} \sin \lambda \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.13)$$

機体が低速の場合は，コリオリ力と遠心力の加速度成分 $-(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}_{eb}^n$ は無視できる．求めた運動加速度を使って，速度を時間積分する．

$$\begin{bmatrix} v_x^n \\ v_y^n \\ v_z^n \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} v_x^n \\ v_y^n \\ v_z^n \end{bmatrix}_{k-1} + \Delta t \begin{bmatrix} a_x^n \\ a_y^n \\ a_z^n \end{bmatrix}_k \quad (9.14)$$

9.2.3 位置の時間更新

位置を表す緯度，経度，高度の時間微分は，式 (8.40) より，

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{\mu} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_N}{R_N + h} \\ \frac{v_E}{(R_E + h) \cos \lambda} \\ -v_D \end{bmatrix}_k$$

である．この式を時間積分すると，

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ h \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ h \end{bmatrix}_{k-1} + \Delta t \begin{bmatrix} \frac{v_N}{R_N + h} \\ \frac{v_E}{(R_E + h) \cos \lambda} \\ -v_D \end{bmatrix}_k \quad (9.15)$$

となる。(問題 9.1 参照)

9.2.4 共分散行列の時間更新

共分散行列 \mathbf{P} の時間更新は、式 (7.44) より、

$$\mathbf{P}_{k(-)} = \Phi_{k-1} \mathbf{P}_{k-1(+)} \Phi_{k-1}^T + \Gamma_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k-1}^T$$

である。ここで、 x, y, z 軸の角速度センサのノイズの分散が同じ $\delta\omega^2$ で、互いに相関が無いものとし、 x, y, z 軸の加速度センサのノイズの分散が同じ δf^2 で、互いに相関が無いものとする、システムノイズ行列は、

$$\Gamma_k \mathbf{Q}_k \Gamma_k^T = \Delta t^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \delta\omega^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \delta f^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (9.16)$$

となる。

9.3 観測方程式

観測方程式は式 (7.42) より、

$$\delta \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \delta \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k)$$

である。慣性航法装置における観測の代表として、位置の観測、速度の観測、姿勢の観測のそれぞれの観測方程式を以下に示す。

9.3.1 位置の観測

移動体に搭載された衛星測位システムが、移動体の位置（緯度、経度、高度）を観測する場合の観測方程式を求める。観測誤差 $\delta \mathbf{z}$ は、衛星測位システムによる位置の観測値 $\tilde{\mathbf{r}}^n$ から真値 \mathbf{r}^n を引いた差であり、

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{z} &= \tilde{\mathbf{r}}^n - \mathbf{r}^n \\ &= (\mathbf{r}^n + \delta \mathbf{r}^n + \mathbf{v}_r) - \mathbf{r}^n \\ &= \delta \mathbf{r}^n + \mathbf{v}_r\end{aligned}\tag{9.17}$$

となる。ここに、 $\delta \mathbf{r}^n$ は位置の誤差、 \mathbf{v}_r は位置の観測のホワイトノイズである。したがって、観測方程式は、

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{z} &= \mathbf{H} \delta \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q}^n \\ \delta \mathbf{v}^n \\ \delta \mathbf{r}^n \end{bmatrix}_k + \mathbf{v}_k\end{aligned}\tag{9.18}$$

となる。

9.3.2 速度の観測

移動体に固定された速度計が、機体座標系における対地速度 \mathbf{v}^b を観測する場合の観測方程式を求める。観測誤差 $\delta \mathbf{z}$ は、速度の観測値 $\tilde{\mathbf{v}}^b$ から真値 \mathbf{v}^b を引いた差であり、

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{z} &= \tilde{\mathbf{v}}^b - \mathbf{v}^b \\ &= (\tilde{\mathbf{C}}_n^b \tilde{\mathbf{v}}^n + \mathbf{v}_v) - \mathbf{v}^b \\ &= (\tilde{\mathbf{C}}_n^b (\mathbf{v}^n + \delta \mathbf{v}^n) + \mathbf{v}_v) - \mathbf{v}^b\end{aligned}\tag{9.19}$$

となる。ここに、 $\tilde{\mathbf{C}}_n^b$ は誤差を含む方向余弦行列、 $\delta \mathbf{v}^n$ は速度の誤差、 \mathbf{v}_v は速度の観測のホワイトノイズである。ここで、誤差を含む方向余弦行列 $\tilde{\mathbf{C}}_n^b$ は、式 (8.59) より、

$$\tilde{\mathbf{C}}_n^b = (\mathbf{I} - (\boldsymbol{\varphi} \times)) \mathbf{C}_n^b\tag{9.20}$$

と表されるから、誤差を含む方向余弦行列 $\tilde{\mathbf{C}}_n^b$ は両辺を転置して、

$$\tilde{\mathbf{C}}_n^b = \mathbf{C}_n^{bT} (\mathbf{I} - (\boldsymbol{\varphi} \times))^T = \mathbf{C}_n^b (\mathbf{I} + (\boldsymbol{\varphi} \times)) \quad (9.21)$$

となる。ここに、外積行列 $(\boldsymbol{\varphi} \times)$ は歪対称行列であることを使った。この式を式 (9.19) に代入すると、

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{z} &= \mathbf{C}_n^b (\mathbf{I} + (\boldsymbol{\varphi} \times)) (\mathbf{v}^n + \delta \mathbf{v}^n) + \mathbf{v}_v - \mathbf{v}^b \\ &= \mathbf{C}_n^b \mathbf{v}^n + \mathbf{C}_n^b \delta \mathbf{v}^n + \mathbf{C}_n^b (\boldsymbol{\varphi} \times) \mathbf{v}^n + \mathbf{v}_v - \mathbf{v}^b \\ &= \mathbf{C}_n^b (-\mathbf{v}^n \times) \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{C}_n^b \delta \mathbf{v}^n + \mathbf{v}_v \end{aligned} \quad (9.22)$$

となる。ここに、第1行から第2行への変形において2次の項を無視した。第2行から第3行への変形において外積の順序を変えて符号を変えた。ここで、姿勢誤差の代わりに式 (5.107) のクォータニオン縮減誤差を使うと、観測方程式は、

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{z} &= \mathbf{H} \delta \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \\ &= \mathbf{C}_n^b (-\mathbf{v}^n \times) 2\delta \mathbf{q}^n + \mathbf{C}_n^b \delta \mathbf{v}^n + \mathbf{v}_v \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_n^b (-2\mathbf{v}^n \times) & \mathbf{C}_n^b & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q}^n \\ \delta \mathbf{v}^n \\ \delta \mathbf{r}^n \end{bmatrix} + \mathbf{v}_v \end{aligned} \quad (9.23)$$

となる。この観測行列 \mathbf{H} の左側の部分行列 $\mathbf{C}_n^b (-2\mathbf{v}^n \times)$ は、

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2v_D & -2v_E \\ -2v_D & 0 & 2v_N \\ 2v_E & -2v_N & 0 \end{bmatrix} \quad (9.24)$$

である。

9.3.3 方位の観測

移動体に固定された加速度センサで重力加速度を計測することによって、水平面に対する傾きの角度、すなわちロール角とピッチ角は観測できるが、方位角は観測できない。方位角を観測するためには、何らかの既知の方位ベクトルを観測する必要がある。高精度な角速度センサがあれば、地球の自転角速度を観測して方位角（真北）を観測できる。磁気

センサがあれば，地磁気を観測して方位角（磁北）を観測できる．天体望遠鏡があれば，恒星（例えば北極星）からの光を観測して方位角（真北）を観測できる．

機体座標系における方位ベクトル \mathbf{z}^b を観測する場合の観測方程式を求める．観測誤差 $\delta\mathbf{z}$ は，方位ベクトルの観測値 $\tilde{\mathbf{z}}^b$ から真値 \mathbf{z}^b を引いた差であり，

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{z} &= \tilde{\mathbf{z}}^b - \mathbf{z}^b \\ &= \left(\tilde{\mathbf{C}}_n^b \mathbf{z}^n + \mathbf{v}_z \right) - \mathbf{z}^b\end{aligned}\quad (9.25)$$

となる．ここに， $\hat{\mathbf{C}}_n^b$ は誤差を含む方向余弦行列， $\delta\mathbf{z}^n$ は方位ベクトルの誤差， \mathbf{v}_z は方位ベクトルの観測のホワイトノイズである．式 (9.21) を代入すると，

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{z} &= \mathbf{C}_n^b \left(\mathbf{I} + (\boldsymbol{\varphi} \times) \right) \mathbf{z}^n + \mathbf{v}_z - \mathbf{z}^b \\ &= \mathbf{C}_n^b \mathbf{z}^n + \mathbf{C}_n^b (\boldsymbol{\varphi} \times) \mathbf{z}^n + \mathbf{v}_z - \mathbf{z}^b \\ &= \mathbf{C}_n^b (\boldsymbol{\varphi} \times) \mathbf{z}^n + \mathbf{v}_z \\ &= \mathbf{C}_n^b \left(-\mathbf{z}^n \times \right) \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{v}_z\end{aligned}\quad (9.26)$$

となる．ここに，第3行から第4行への変形において外積の順序を変えて符号を変えた．ここで，姿勢誤差の代わりにクォータニオン縮減誤差を使うと，式 (5.107) より， $\boldsymbol{\varphi} = 2\delta\mathbf{q}^n$ であるから，観測方程式は，

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{z} &= \mathbf{H} \delta\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \\ &= \mathbf{C}_n^b \left(-2\mathbf{z}^n \times \right) \delta\mathbf{q}^n + \mathbf{v}_z \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_n^b \left(-2\mathbf{z}^n \times \right) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{q}^n \\ \delta\mathbf{v}^n \\ \delta\mathbf{r}^n \end{bmatrix} + \mathbf{v}_v\end{aligned}\quad (9.27)$$

となる．

角速度センサで地球の自転角速度を観測する場合，航法座標系における地球の自転角速度ベクトルは，式 (4.39) より，

$$\boldsymbol{\Omega}^n = \begin{bmatrix} \Omega \cos \lambda \\ 0 \\ -\Omega \sin \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_N \\ 0 \\ \Omega_D \end{bmatrix}$$

であるから、観測行列 \mathbf{H} の左側の部分行列 $\mathbf{C}_n^b (-2\mathbf{z}^n \times)$ は、

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2\Omega_D & 0 \\ -2\Omega_D & 0 & 2\Omega_N \\ 0 & -2\Omega_N & 0 \end{bmatrix} \quad (9.28)$$

となる。

磁気センサで地磁気を観測する場合、航法座標系における地磁気ベクトルは、式 (5.119) より、

$$\mathbf{m}^n = \begin{bmatrix} m_N \\ m_E \\ m_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \cos I \cos D \\ F \cos I \sin D \\ F \sin I \end{bmatrix}$$

であるから、観測行列 \mathbf{H} の左側の部分行列 $\mathbf{C}_n^b (-2\mathbf{z}^n \times)$ は、

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2m_D & -2m_E \\ -2m_D & 0 & 2m_N \\ 2m_E & -2m_N & 0 \end{bmatrix} \quad (9.29)$$

となる。

9.4 観測更新

カルマンゲイン \mathbf{K}_k を式 (7.45) を使って計算する。

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k(-)} \mathbf{H}_k^T \left(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k(-)} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \right)^{-1}$$

ここに、9.3 節の観測方程式の場合、観測行列 \mathbf{H}_k は 3 行 9 列の行列であるから、 $\mathbf{P}_{k(-)} \mathbf{H}_k^T$ は 9 行 3 列の行列となり、 $\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k(-)} \mathbf{H}_k^T$ は 3 行 3 列の行列となる。観測ノイズ行列 \mathbf{R}_k も 3

行 3 列の行列であるから、 $\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k(-)} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k$ とその逆行列も 3 行 3 列の行列となる。したがって、カルマンゲイン \mathbf{K}_k は 9 行 3 列の行列となる。ここに、観測ノイズ行列 \mathbf{R} は、 x, y, z 軸の観測量に相関が無ければ対角行列となる。

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} v_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & v_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & v_z^2 \end{bmatrix} \quad (9.30)$$

状態変数の観測更新量 $\delta \mathbf{x}$ を式 (7.46) を使って計算する。9.3 節の観測方程式の場合、カルマンゲイン \mathbf{K}_k は 9 行 3 列の行列、観測誤差 $\delta \mathbf{z}_k$ は 3 行 1 列のベクトルであるから、観測更新量 $\delta \mathbf{x}$ は 9 行 1 列のベクトルとなる。

$$\delta \mathbf{x}_{k(+)} = \mathbf{K}_k \left(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}(\mathbf{x}_{k(-)}) \right)$$

$$\begin{bmatrix} \delta q_1^n \\ \delta q_2^n \\ \delta q_3^n \\ \delta v_N \\ \delta v_E \\ \delta v_D \\ \delta \lambda \\ \delta \mu \\ \delta h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} \\ k_{91} & k_{92} & k_{93} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 - \hat{z}_1 \\ \tilde{z}_2 - \hat{z}_2 \\ \tilde{z}_3 - \hat{z}_3 \end{bmatrix} \quad (9.31)$$

観測更新量 $\delta \mathbf{x}$ の上側の 3 個は、クォータニオン縮減誤差の観測更新量であり、式 (5.106) より、

$$\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}_{k(+)} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}_{k(-)} + \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & -q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & -q_0 \end{bmatrix}_{k(-)} \begin{bmatrix} \delta q_1^n \\ \delta q_2^n \\ \delta q_3^n \end{bmatrix} \quad (9.32)$$

として、クォータニオンを観測更新する。次に式 (5.51) により方向余弦行列を更新する。

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

オイラー角を出力するときは、式 (5.6) により方向余弦行列からオイラー角を計算する。

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{c_{32}}{c_{33}}, \quad \theta = -\sin c_{31}, \quad \psi = \tan^{-1} \frac{c_{21}}{c_{11}}$$

観測更新量 $\delta \mathbf{x}$ の中央の 3 個は、速度誤差の観測更新量であり、

$$\begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix}_{k(+)} = \begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix}_{k(-)} + \begin{bmatrix} \delta v_N \\ \delta v_E \\ \delta v_D \end{bmatrix} \quad (9.33)$$

として、速度を観測更新する。

観測更新量 $\delta \mathbf{x}$ の下側の 3 個は、位置誤差の観測更新量であり、

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ h \end{bmatrix}_{k(+)} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ h \end{bmatrix}_{k(-)} + \begin{bmatrix} \delta \lambda \\ \delta \mu \\ \delta h \end{bmatrix} \quad (9.34)$$

として、位置を観測更新する。

共分散行列 \mathbf{P}_k は式 (7.47) を使って観測更新する。

$$\mathbf{P}_{k(+)} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k(-)}$$

Note

クォータニオンを q_1, q_2, q_3, q_0 の順に並べる流儀の場合、式(9.32) は次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_0 \end{bmatrix}_{k(+)} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_0 \end{bmatrix}_{k(-)} + \begin{bmatrix} -q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & -q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & -q_0 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}_{k(-)} \begin{bmatrix} \delta q_1^n \\ \delta q_2^n \\ \delta q_3^n \end{bmatrix}$$

9.5 例題

無人航空機（低速度）の飛行シミュレーションを行う。

(1) 飛行経路とスケジュール

飛行経路を図 9.1 に、飛行スケジュールを表 9.1 に示す。静止状態から鉛直上方に上昇した後、南北方向に細長い周回コースを一周した後、鉛直下方に下降して元の位置に戻る。

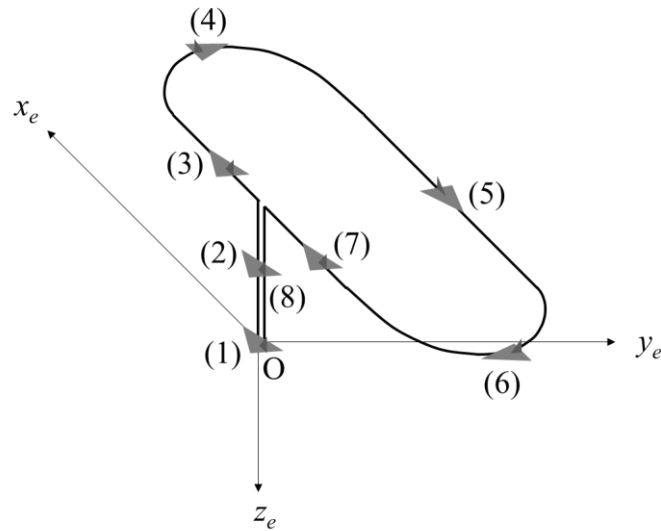


図 9.1 飛行経路

表 9.1 飛行スケジュール

No	飛行状態	時間 (s)	飛行距離 (m)	説明
1	静止	5	0	地上に静止（水平，北向き）
2	上昇	10	50	上方に加速・減速して空中に静止
3	加速	10	50	機首方向に加速して，速度 10 m/s に
4	旋回	10	100	速度 10 m/s で右回りに半周
5	直進	10	100	速度 10 m/s で距離 100 m を直進
6	旋回	10	100	速度 10 m/s で右回りに半周
7	減速	10	50	機首方向に減速して，空中に静止
8	下降	10	50	下方に加速・減速して地上に戻る

(2) センサデータの生成

飛行経路と飛行スケジュールから生成した加速度センサと角速度センサのシミュレーションデータを図 9.2 と図 9.3 に示す。加速度センサのデータは理論値に、平均値が 0、標準偏差が 0.01 m/s^2 (1.0 mg) のホワイトノイズを加えている。角速度センサのデータは理論値に、平均値が 0、標準偏差が 0.002 rad/s (0.11 deg/s) のホワイトノイズを加えている。時間間隔はともに 0.1 s (サイクル 10 Hz) とした。

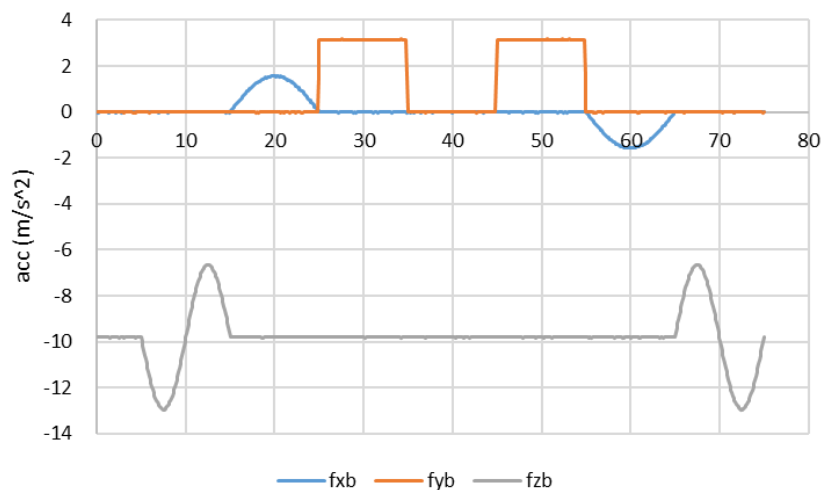


図 9.2 加速度センサのシミュレーションデータ

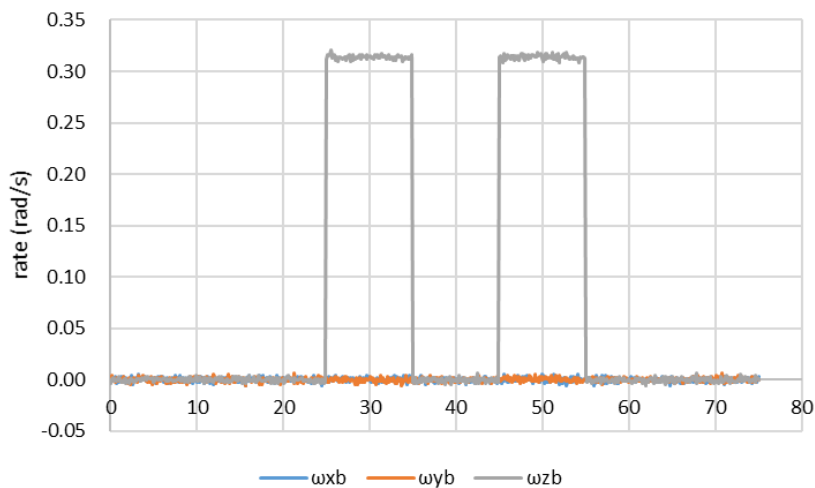


図 9.3 角速度センサのシミュレーションデータ

(3) 推移行列と可観測性

カルマンフィルタの推移行列 Φ は、式 (9.2) より、

$$\Phi = \mathbf{I} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \frac{1}{2}\mathbf{F}_{12} & \frac{1}{2}\mathbf{F}_{13} \\ 2\mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{32} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \Delta t$$

である。ここに、部分行列（係数行列） \mathbf{F}_{ij} は式 (8.82)~(8.84) である。ここで、例題の飛行速度は低速であるから移動角速度 (\mathbf{v}/R) の項を無視し、飛行高度 h は低空であるから地球の曲率半径 R に対して無視すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & -\Omega \sin \lambda & 0 \\ \Omega \sin \lambda & 0 & \Omega \cos \lambda \\ 0 & -\Omega \cos \lambda & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R} & 0 \\ -\frac{1}{R} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\tan \lambda}{R} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{13} = \begin{bmatrix} -\Omega \sin \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega \cos \lambda & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & -f_D^n & f_E^n \\ f_D^n & 0 & -f_N^n \\ -f_E^n & f_N^n & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -2\Omega \sin \lambda & 0 \\ 2\Omega \sin \lambda & 0 & 2\Omega \cos \lambda \\ 0 & -2\Omega \cos \lambda & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_{32} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R \cos \lambda} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{9.35}$$

となる。位置の観測による可観測性行列 \mathbf{U} を求めると、

$$\begin{aligned}
\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{HF} \\ \mathbf{HF}^2 \\ \mathbf{HF}^3 \\ \mathbf{HF}^4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{32} & \mathbf{0} \\ 2\mathbf{F}_{32}\mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{32}\mathbf{F}_{22} & \mathbf{0} \\ 2\mathbf{F}_{32}\mathbf{F}_{22}\mathbf{F}_{21} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
2\mathbf{F}_{32}\mathbf{F}_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{2g}{R} & 0 \\ -\frac{2g}{R\cos\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{32} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R\cos\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
2\mathbf{F}_{32}\mathbf{F}_{22}\mathbf{F}_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4g\Omega\cos\lambda & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{32}\mathbf{F}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\Omega\cos\lambda & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{9.36}$$

となる。ここに、無人機は等速直線運動を行っているものとした。(問題 9.2 参照)

この可観測性行列 \mathbf{U} は第 3 列がすべて 0 であることより、行列のランクは 8 であり、9 個の状態変数すべてを観測することはできない。第 3 列がすべて 0 であることより、3 番目の状態変数である方位角が観測できないことがわかる。無人機が加速度運動を行う場合には、可観測性行列 \mathbf{U} のランクは 9 となり、9 個の状態変数すべてを観測できる。

(4) 慣性航法

カルマンフィルタの時間更新のみを行って推定した飛行経路を図 9.4 に示す。視点を図 9.1 と同様に置いた斜視図であり、図中の 3 本の直線 (黒の破線) は長さ 100 m の座標軸 (East, North, Up 軸) である。

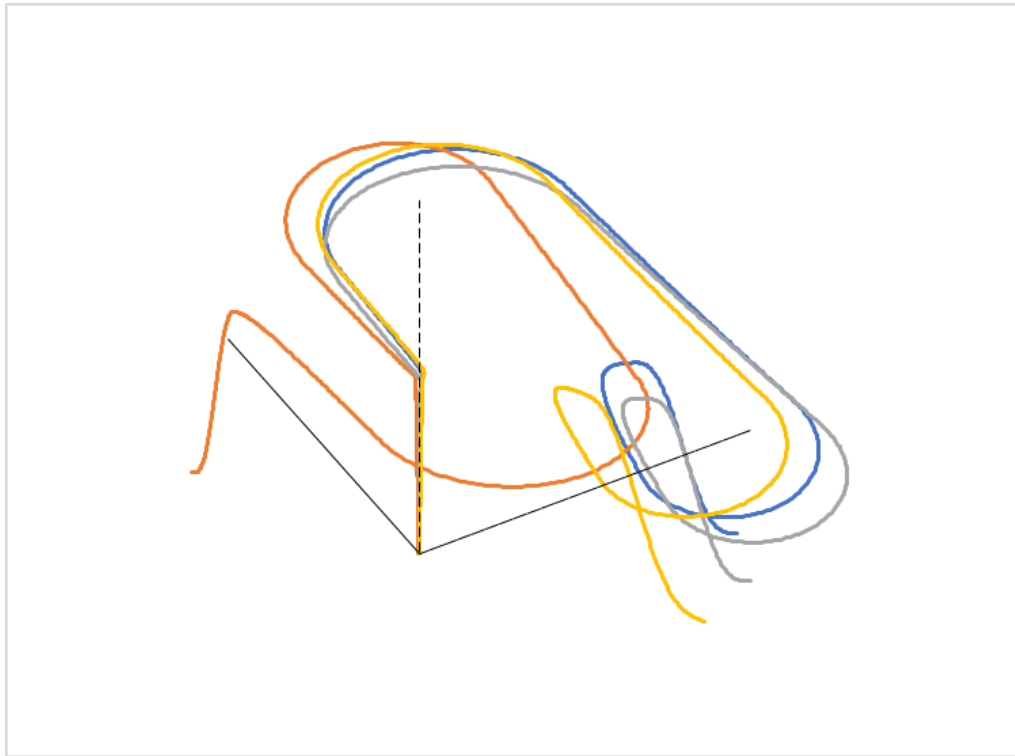


図 9.4 慣性航法の推定飛行経路

ここに、4本の曲線は、加速度センサ3個と角速度センサ3個のセンサデータの計6組のホワイトノイズデータセットを4回変更して計算した結果である。4個の終点の位置誤差は、69 m から 87 m の範囲に分布した。一方、共分散行列 \mathbf{P} が予測する位置誤差を図 9.5 に示す。縦軸の単位を距離 (m) とするため、緯度誤差 $\sqrt{p_{77}}$ には R_N をかけ、経度誤差 $\sqrt{p_{88}}$ には $R_E \cos \lambda$ をかけて表示した。位置誤差は時間とともに増加し、終点における位置誤差は直線距離で約 99 m であった。

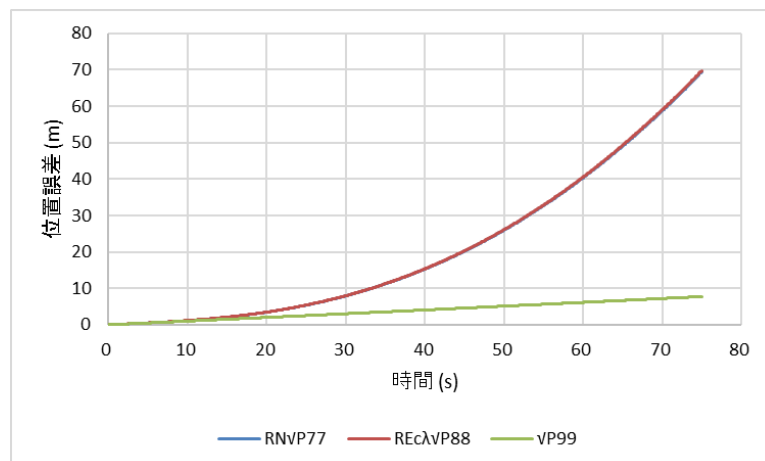


図 9.5 共分散行列 \mathbf{P} の時間変化

(5) 複合航法

衛星測位システム (GPS) による位置の観測を利用した複合航法のシミュレーションを行う。位置観測のシミュレーションデータの一例を図 9.6 に示す。図 9.4 と同じ視点から見た斜視図である。観測の時間間隔は 1 s (サイクル 1 Hz) とした。

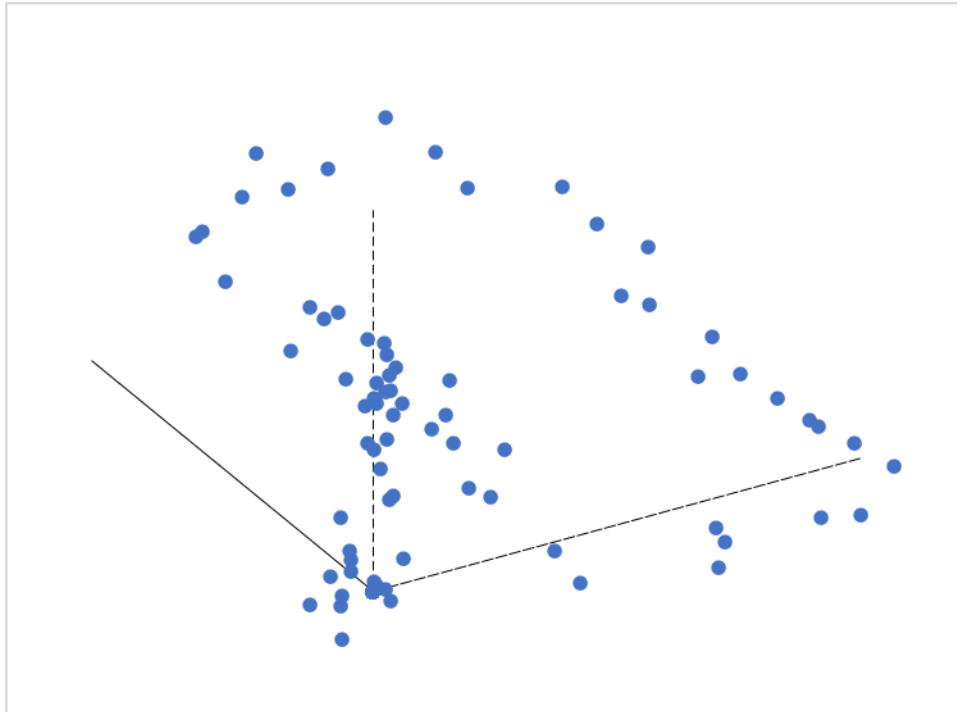


図 9.6 衛星測位システムのシミュレーションデータ

このような位置観測データを使って、カルマンフィルタの時間更新と観測更新を行って推定した飛行経路を図 9.7 に示す。図 9.4 と同じ視点から見た斜視図である。推定飛行経路の曲線が鋸歯状になっているのは、時間更新と観測更新のサイクルが異なるためである。

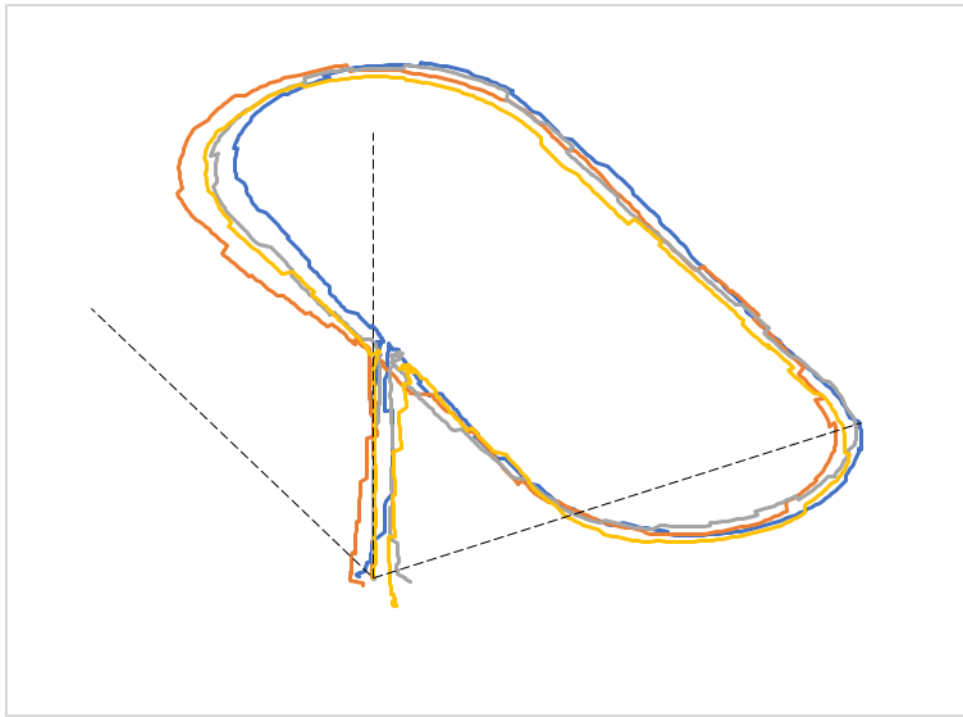


図 9.7 複合航法の推定飛行経路

ここに、4本の曲線は、加速度センサ3個と角速度センサ3個のセンサデータの6組と、衛星測位システムの位置データ3個（緯度・経度・高度）の計9組のホワイトノイズデータセットを4回変更して計算した結果である。4個の終点の位置誤差は、2.3 mから8.1 mの範囲に分布した。一方、共分散行列 \mathbf{P} が予測する位置誤差を図9.8に示す。縦軸の単位を距離 (m) とするため、緯度誤差 $\sqrt{p_{77}}$ には R_N をかけ、経度誤差 $\sqrt{p_{88}}$ には $R_E \cos \lambda$ をかけて表示した。位置誤差は時間が経過すると定常状態に達し、直線距離で約 3.5 m であった。

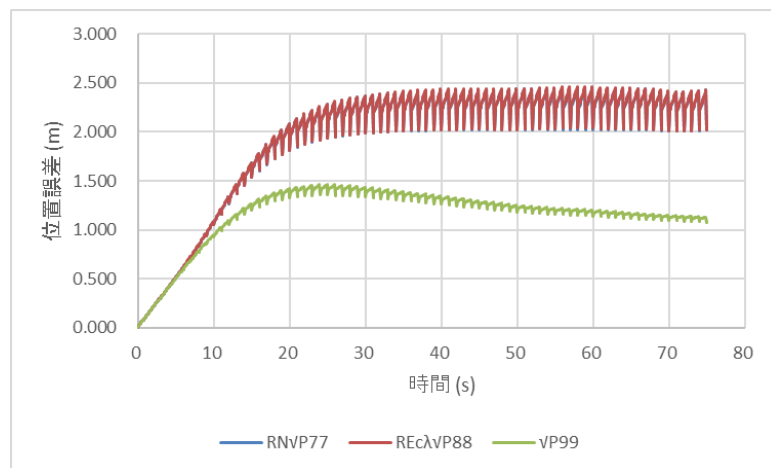


図 9.8 共分散行列 \mathbf{P} の時間変化

問題

問題 9.1 システムノイズ行列の式 (9.16) を証明せよ.

問題 9.2 可観測性行列の式 (9.36) を導け.