

測地線航路

1. 測地線

一般に曲面上の 2 地点を結ぶ最短経路を測地線 (geodesic) と言う。測地学 (geodesy) から来た用語である。球 (sphere) における測地線は大円 (great circle) である。大圏航法では地球は球で近似されるが、より正確には回転楕円体 (spheroid) で近似される。大円とは異なり、一般に測地線は平面曲線ではなく、閉じた曲線でもない。つまり、測地線を延長して回転楕円体を一周しても、一般に始点には戻らない。回転楕円体の測地線の計算方法として、1975 年に米空軍の T. Vincenty が発表した方法が、現在も広く国内外で使われている。

ただ、この Vincenty の方法が発表された関連文書 1 には、式の導出や説明が全く記されていない。また、この方法は、使用する三角関数を $\sin x, \cos x, \tan^{-1} x$ の 3 種のみに限定していて、 $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x$ が使われていない。そのため、現在では冗長な計算部分もある。Vincenty の式の解説として、国内の文献では、関連文書 2 に詳しい解説や証明があり非常にありがたい。そこで、本資料では、

- 1) 式中の 2 個の積分近似式の詳細は関連文書 2 に委ねる
- 2) 球面三角法による証明は付録 A に簡単に記すにとどめる
- 3) $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x$ の使用を許容する

ことにより、関係式の全体像を掴みやすいように再構成する。なお、本書の記号は、関連文書 1 による記号に準じるが、必要に応じて一部変更している。

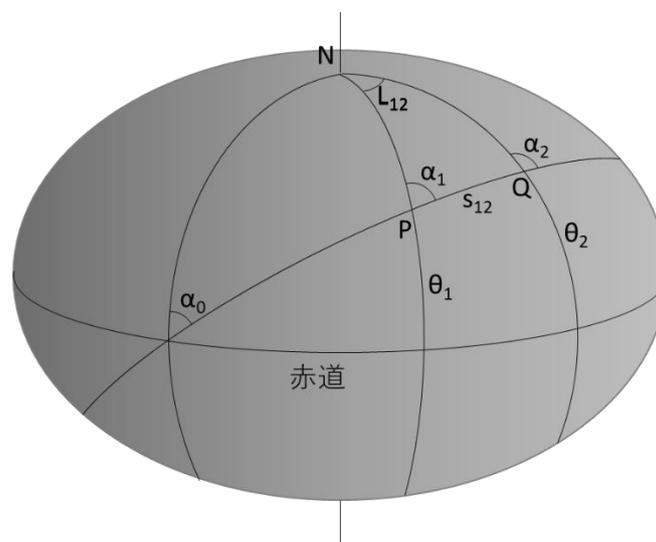


図 1 地球と測地線

上図は地球の回転楕円体モデルを示す（扁平率を誇張して描いている）。長半径（赤道半径）を a 、短半径（極半径）を b とする。表面上の 2 地点 P, Q を通る斜めの曲線は測地線、 s_{12} はこの測地線に沿った 2 地点間の距離、 L_{12} は 2 地点間の経度差、点 N は北極、曲線 NP, NQ はそれぞれ点 P, Q における子午線、 θ_1, θ_2 はそれぞれ点 P, Q の更成緯度（ $-90 \sim 90$ deg の範囲）、測地線と子午線の交角 α_1, α_2 はそれぞれ点 P, Q における方位角（ $0 \sim 180$ deg の範囲）、角度 α_0 は測地線と赤道の交点における方位角である。始点を添え字 1、終点を添え字 2 で表し、始点と終点との間を添え字 12 で表している。

測地学においては、始点の緯度・経度・方位角と、そこからの距離を与えて、終点の緯度・経度・方位角を求める問題を第 1 問題（または第 1 課題、順問題, direct problem）と呼び、始点と終点の 2 地点の緯度・経度を与えて、2 地点間の距離と 2 地点の方位角を求める問題を第 2 問題（または第 2 課題、逆問題, inverse problem）と呼んでいる。

2. 楕円体上の距離と経度の式

地球の地理緯度（測地緯度, geodetic latitude） ϕ と更成緯度（reduced latitude） θ の関係は、地球の扁平率 $f(=1-b/a)$ を用いて、

$$\tan \theta = (1 - f) \tan \phi \quad (1)$$

と表される。以下の計算では主に更成緯度 θ を使い、入出力では地理緯度 ϕ を使う。回転楕円体表面の測地線上の微小な線分の距離 ds を下図の三角形の斜辺に示す。縦線は子午線、横線は緯線、角度 α は測地線の方位角である。

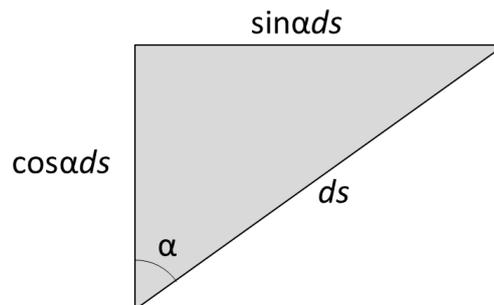


図 2 回転楕円体上の測地線の微小部分 ds

方位角 α で距離増分 ds だけ進んだときの子午線方向の距離増分 $\cos \alpha ds$ (図 2 の縦方向の距離) を求める. 子午面平面 (図 3 の右図の $x-z$ 平面) 内の子午線 (楕円) 上の点の座標は更成緯度 θ を用いて, $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ と表されるから, 距離増分 ds と更成緯度増分 $d\theta$ の関係は,

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha \cdot ds &= \sqrt{dx^2 + dz^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2} d\theta \\
 &= \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta \\
 &= a \sqrt{\sin^2 \theta + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \theta} d\theta \\
 &= a \sqrt{(1 - \cos^2 \theta) + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \theta} d\theta \\
 &= a \sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cos^2 \theta} d\theta \\
 &= a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta} d\theta \\
 \therefore ds &= \frac{a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}}{\cos \alpha} d\theta \tag{2}
 \end{aligned}$$

となる. ここに, e は地球の離心率 (≈ 0.08) であり, $e^2 = 1 - b^2/a^2$ である. 右辺の $\cos \alpha$ の符号と $d\theta$ の符号は一致する. 航路上の点の更成緯度 θ と方位角 α が与えられれば, 上式を積分して距離 s が計算できる. 次に, 方位角 α で距離増分 ds だけ進んだときの経度方向の距離増分 $\sin \alpha ds$ (図 2 の横方向の距離) を考えると, 上式を用いて,

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha ds &= \sin \alpha \cdot \frac{a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}}{\cos \alpha} d\theta \\
 &= \tan \alpha \cdot a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta} d\theta
 \end{aligned}$$

となる. 一方, 更成緯度 θ における緯線は半径が $a \cos \theta$ の円である (図 3 の右図参照) から, 上式の経度方向の距離増分は経度増分 dL を用いて $a \cos \theta dL$ とも表される. よって, 経度増分 dL と更成緯度増分 $d\theta$ の関係は,

$$\begin{aligned}
 a \cos \theta dL &= \tan \alpha \cdot a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta} d\theta \\
 \therefore dL &= \tan \alpha \cdot \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}}{\cos \theta} d\theta \tag{3}
 \end{aligned}$$

となる。右辺の $\tan \alpha$ の符号と $d\theta$ の符号は一致する。航路上の点の更成緯度 θ と方位角 α が与えられれば、上式を積分して経度差 $L_2 - L_1$ が計算できる。

3. 測地線の式

地球表面上を、摩擦力などの外力が働くことなく滑らかに運動する質量 m の物体を考える。物体に働く力は、鉛直下向きに重力、鉛直上向きに回転楕円体表面からの反力の 2 個のみである。重力と反力が働く方向である鉛直方向とは、回転楕円体表面の法線方向であるから、物体に仕事をしない。したがって、物体の力学的エネルギー、すなわち、運動エネルギーと位置エネルギーの和は保存される。さらに、地球の海面は地球全体で繋がっており、等ポテンシャル面である。すなわち、重力の位置エネルギーは回転楕円体の表面上のどこでも等しく、物体の位置エネルギーは一定である。したがって、この物体の運動エネルギーも保存される。よって、物体の速度 v および運動量 mv も保存される。

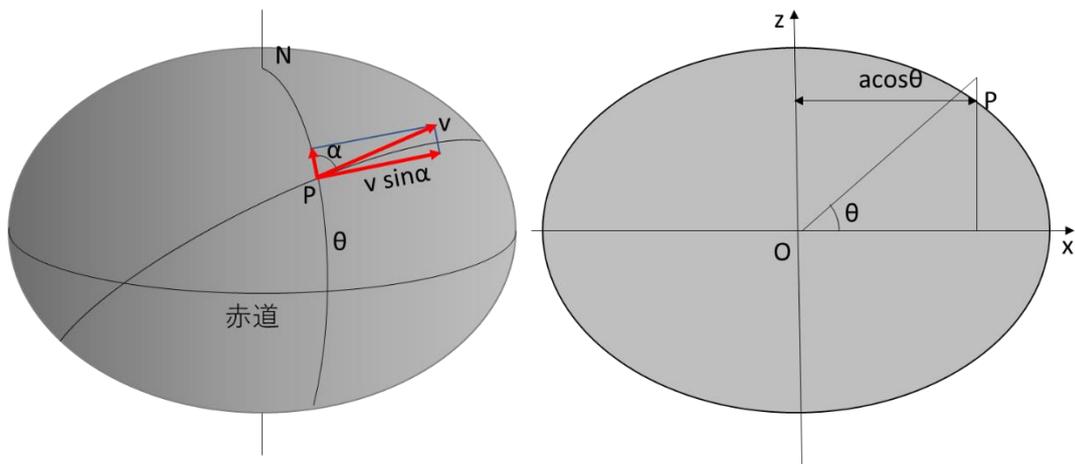


図3 角運動量の保存

さらに、回転楕円体表面の法線の延長線はすべて自転軸（短軸）と交わることから、重力および反力は物体に対して自転軸回りのトルクを生じない。よって、物体の自転軸回りの角運動量も保存される。物体の速度の周方向（経度方向）成分は、方位角 α を用いて $v \sin \alpha$ である（左図参照）。また、この周方向成分の自転軸からの距離（腕の長さ）は、更成緯度 θ を用いて、 $x = a \cos \theta$ である（右図参照）。したがって、自転軸回りの角運動量保存則は、

$$mv \sin \alpha \cdot a \cos \theta = \text{const.}$$

$$\therefore \sin \alpha \cdot \cos \theta = \text{const.}$$

$$\therefore \sin \alpha \cdot \cos \theta = \sin \alpha_0 \tag{4}$$

と表される。ここに、角度 α_0 は測地線と赤道（更成緯度 $\theta = 0$ ）との交点における方位角であり、一つの測地線上では定数である。上式の測地線における方位角 α と更成緯度 θ の式を「測地線の式」とも言う。この式の緯度 θ と方位角 θ の関係は、球の大円にも成立する。

この測地線の式より、北半球においては、更成緯度 θ が 90 deg に近づく（北極に近づく）ほど、方位角 α が 90 deg に近づく（東向きになる）。同様に、南半球においては、更成緯度 θ が -90 deg に近づく（南極に近づく）ほど、方位角 α が 90 deg に近づく（東向きになる）。また、赤道上を東向きに進む場合は、

$$\sin \alpha \cdot \cos \theta = \sin 90 \cdot \cos 0 = 1 \times 0 = 0 = \text{const.}$$

を満足するから、赤道は測地線の一つである。また、子午線上を北向きに進む場合は、

$$\sin \alpha \cdot \cos \theta = \sin 0 \cdot \cos \theta = 0 \times \cos \theta = 0 = \text{const.}$$

を満足するから、子午線も測地線の一つである。赤道の円や子午線の楕円は、例外的に閉じた平面曲線である。なお、測地線の計算では、地球の自転は考えない。すなわち、地球は静止しているものとし、地球表面を運動する物体に働くコリオリ力は考えない。

4. 更成緯度を変数とする距離と経度の式

測地線の式 (4) を利用して、距離増分 ds の式から方位角 α を消去して、更成緯度 θ のみの式に変形する。測地線の式 (4) を変形して $\cos \alpha$ を求めると、

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha_0}{\cos^2 \theta}} = \frac{\pm \sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \alpha_0}}{\cos \theta} \quad (5)$$

となる。方位角 α は 0~180 deg の範囲をとる。この式を距離増分 ds の式 (2) に代入すると、

$$\begin{aligned}
ds &= \frac{a\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}}{\cos\alpha} d\theta \\
&= \frac{\cos\theta}{\pm\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\alpha_0}} \cdot a\sqrt{1-e^2\cos^2\theta} d\theta \\
&= \pm a \frac{\cos\theta\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}}{\sqrt{1-\sin^2\theta-1+\cos^2\alpha_0}} d\theta \\
\therefore ds &= \pm a \frac{\cos\theta\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}}{\sqrt{\cos^2\alpha_0-\sin^2\theta}} d\theta
\end{aligned} \tag{6}$$

となり，距離増分 ds が更成緯度 θ のみの式になった．右辺の±符号は，更成緯度 θ が増加するときは正号，減少するときは負号をとる．測地線の式 (4) をさらに変形して $\tan\alpha$ を求めると，

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha_0}{\cos\theta} \cdot \frac{\pm\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\alpha_0}} = \frac{\pm\sin\alpha_0}{\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\alpha_0}} \tag{7}$$

となる．この式を経度増分 dL の式 (3) に代入すると，

$$\begin{aligned}
dL &= \tan\alpha \cdot \frac{\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}}{\cos\theta} d\theta \\
&= \frac{\pm\sin\alpha_0}{\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\alpha_0}} \cdot \frac{\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}}{\cos\theta} d\theta \\
\therefore dL &= \frac{\pm\sin\alpha_0\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}}{\cos\theta\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\alpha_0}} d\theta
\end{aligned} \tag{8}$$

となり，経度増分 dL が更成緯度 θ のみの式になった．右辺の±符号は，更成緯度 θ が増加するときは正号，減少するときは負号をとる．

5. 大円距離を変数とする距離と経度の式

前節で距離増分 ds と経度増分 dL がともに更成緯度 θ の関数となったが，航路を進むに従って更成緯度 θ は増減するため，変数として扱いにくい．そこで，新たな変数 σ を媒介変数として導入し，更成緯度 θ をこの媒介変数 σ に変数変換する．その説明図を下図に示す．

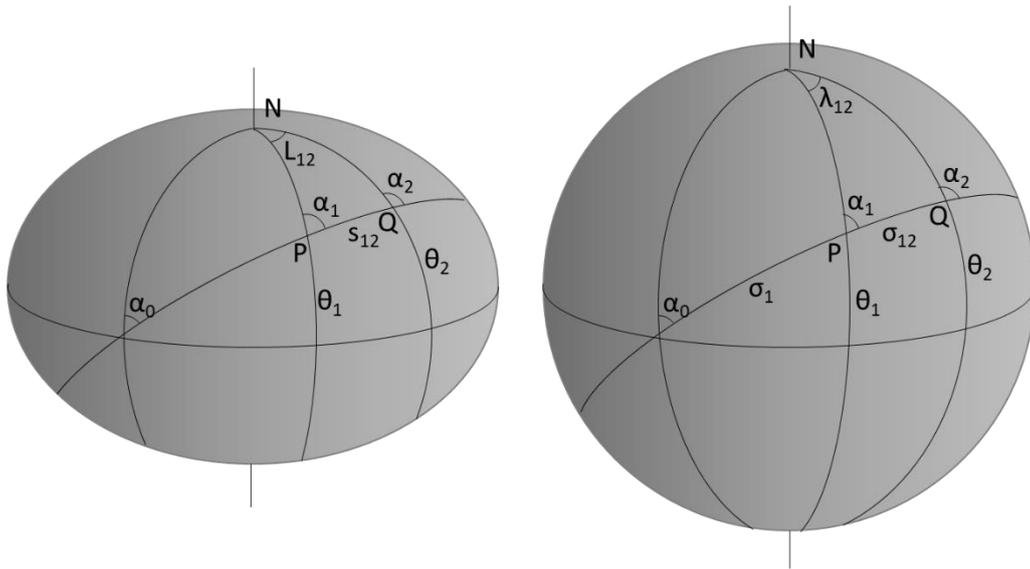


図4 回転楕円体の測地線（左側）と球の大円（右側）

左図は，回転楕円体上の2地点 P, Q を結ぶ測地線を示し，図1と同じ図である．右図は，半径1（単位長さ）の球上の2地点 P, Q を結ぶ大円を示す．大圏航路の第1問題と第2問題は，球面三角法を利用して容易に解くことができる．

更成緯度 θ と方位角 α は左右の図で共通であり，距離 (s と σ) と経度 (L と λ) は左右の図で異なる．以下，右図の σ を大円距離， λ を大円経度差と呼び，媒介変数として扱う．球面三角法より，大円距離 σ と大円経度差 λ は付録 A の式 (A4) で相互に変換できる．さらに，更成緯度 θ と大円距離 σ の間に次式が成り立つ．付録 A の式 (A1) を参照．

$$\sin \theta = \sin \sigma \cdot \cos \alpha_0 \quad (9)$$

回転楕円体の距離 s と経度 L をそれぞれ，大円距離 σ を変数とする式に変形する．まず，上式の両辺を微分すると，

$$\begin{aligned} \cos \theta d\theta &= \cos \sigma d\sigma \cdot \cos \alpha_0 \\ \therefore d\theta &= \frac{\cos \sigma \cdot \cos \alpha_0}{\cos \theta} d\sigma = \frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \sigma} \cdot \cos \alpha_0}{\cos \theta} d\sigma \\ &= \frac{\pm \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \alpha_0}} \cdot \cos \alpha_0}{\cos \theta} d\sigma \\ \therefore d\theta &= \frac{\pm \sqrt{\cos^2 \alpha_0 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta} d\sigma \end{aligned} \quad (10)$$

となる. 途中で式 (9) を再度代入している. この式を回転楕円体の距離増分 ds の式 (6) に代入すると,

$$\begin{aligned}
 ds &= \pm a \frac{\cos \theta \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}}{\sqrt{\cos^2 \alpha_0 - \sin^2 \theta}} d\theta \\
 &= \pm a \frac{\cos \theta \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}}{\sqrt{\cos^2 \alpha_0 - \sin^2 \theta}} \cdot \frac{\pm \sqrt{\cos^2 \alpha_0 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta} d\sigma \\
 &= a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta} d\sigma \\
 &= a \sqrt{1 - e^2 (1 - \sin^2 \theta)} d\sigma \\
 &= a \sqrt{1 - e^2 + e^2 \sin^2 \theta} d\sigma \\
 &= a \sqrt{1 - e^2} \sqrt{1 + \frac{e^2 \cos^2 \alpha_0}{1 - e^2} \sin^2 \theta} d\sigma \\
 \therefore ds &= b \sqrt{1 + \frac{e^2 \cos^2 \alpha_0}{1 - e^2} \sin^2 \theta} d\sigma
 \end{aligned} \tag{11}$$

となる. 右辺の $\sqrt{\quad}$ の中の係数 $\frac{e^2 \cos^2 \alpha_0}{1 - e^2}$ は一つの測地線 (同じ α_0) では定数であるから,

$$u^2 = \frac{e^2 \cos^2 \alpha_0}{1 - e^2} \tag{12}$$

と定義して定数として扱う. この式を代入すると, 距離増分 ds の式 (6) は,

$$ds = b \sqrt{1 + u^2 \sin^2 \theta} d\sigma \tag{13}$$

となり, 大円距離 σ を変数とする簡単な形になる. 大円距離 σ は $0 \sim 180 \text{ deg}$ の範囲をとる. 大円距離 $\sigma = 180 \text{ deg}$ は球の対蹠点である. 上式を σ で積分すると, 2 地点間の距離 s_{12} は,

$$s_{12} = b \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{1 + u^2 \sin^2 \theta} d\sigma \tag{14}$$

となる. なお, 上式は, 変数変換すると, 下記の第 2 種不完全楕円積分 E で表すこともで

きる。

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

式 (14) の右辺の $\sqrt{\quad}$ の式を u^8 の項まで級数展開してから積分し、その結果を入れ子型の式 (nested equation) に変形すると次の近似式が得られる。その詳細は関連文書 2 を参照。

$$\begin{aligned} s_{12} &= bA(\sigma_{12} - \Delta\sigma) \\ A &= 1 + \frac{u^2}{16384} \left(4096 + u^2 \left(-768 + u^2 (320 - 175u^2) \right) \right) \\ B &= \frac{u^2}{1024} \left(256 + u^2 \left(-128 + u^2 (74 - 47u^2) \right) \right) \\ \sigma_m &= \sigma_1 + \frac{\sigma_{12}}{2} \\ \Delta\sigma &= B \sin \sigma_{12} \left(\cos 2\sigma_m + \frac{B}{4} \left(\cos \sigma_{12} \left(-1 + 2 \cos^2 2\sigma_m \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{B}{6} \cos 2\sigma_m \left(-3 + 4 \sin^2 \sigma_{12} \right) \left(-3 + 4 \cos^2 2\sigma_m \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (15)$$

ここに、 σ_m は大円上の始点と終点の中間地点の赤道交点からの距離である。すなわち σ_1 と σ_2 の平均値である。上式を使うと大円距離 σ_{12} から距離 s_{12} を直ちに求めることができる。逆に距離 s_{12} から大円距離 σ_{12} を求める（上式の逆関数）には、繰り返し計算で漸近的に求める。その手順の詳細は第 6 節を参照。

式 (12) より、定数 u の数値のオーダーは、離心率 e (≈ 0.08)と同じオーダーであるから、式 (15) の誤差は e^9 のオーダー、すなわち、 10^{-10} のオーダーである。地球の半径は約 6,371 km であるから、距離 s_{12} の誤差は 1 mm のオーダーである。

次に経度増分 dL の式 (8) についても、更成緯度 θ を大円距離 σ に変数変換する。まず $d\theta$ の式 (10) を変形すると、

$$\begin{aligned} d\theta &= \frac{\pm \sqrt{\cos^2 \alpha_0 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta} d\sigma \\ &= \frac{\pm \sqrt{(1 - \sin^2 \alpha_0) - (1 - \cos^2 \theta)}}{\cos \theta} d\sigma \\ \therefore d\theta &= \frac{\pm \sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \alpha_0}}{\cos \theta} d\sigma \end{aligned} \quad (16)$$

となる。この式を経度増分 dL の式 (8) に代入すると、

$$\begin{aligned}
 dL &= \pm \frac{\sin \alpha_0 \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}}{\cos \theta \sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \alpha_0}} d\theta \\
 &= \pm \frac{\sin \alpha_0 \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}}{\cos \theta \sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \alpha_0}} \cdot \frac{\pm \sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \alpha_0}}{\cos \theta} d\sigma \\
 &= \frac{\sin \alpha_0 \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}}{\cos^2 \theta} d\sigma \\
 &= \frac{\sin \alpha_0 \sqrt{1 - e^2 (1 - \sin^2 \theta)}}{1 - \sin^2 \theta} d\sigma \\
 \therefore dL &= \frac{\sin \alpha_0 \sqrt{1 - e^2 (1 - \cos^2 \alpha_0 \sin^2 \sigma)}}{1 - \cos^2 \alpha_0 \sin^2 \sigma} d\sigma
 \end{aligned} \tag{17}$$

となる。この式を積分すると、2地点間の経度差 L_{12} は、

$$L_{12} = \sin \alpha_0 \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\sqrt{1 - e^2 (1 - \cos^2 \alpha_0 \sin^2 \sigma)}}{1 - \cos^2 \alpha_0 \sin^2 \sigma} d\sigma \tag{18}$$

となり、大円距離 σ の関数となる。この式の右辺の式を e^6 の項まで級数展開してから積分し、その結果を入れ子型の式に変形すると次の近似式が得られる。その詳細は関連文書 2 を参照。

$$\begin{aligned}
 L_{12} &= \lambda_{12} - (1 - C) f \sin \alpha_0 \left(\sigma_{12} + C \sin \sigma_{12} \left(\cos 2\sigma_m + C \cos \sigma_{12} (-1 + 2 \cos^2 2\sigma_m) \right) \right) \\
 \lambda_{12} &= \cos^{-1} \left(\frac{\cos \sigma_{12} - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2}{\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2} \right) \\
 C &= \frac{f}{16} \cos^2 \alpha_0 \left(4 + f (4 - 3 \cos^2 \alpha_0) \right)
 \end{aligned} \tag{19}$$

ここに、 λ_{12} は大円経度差である。上式を使うと大円距離 σ_{12} から経度差 L_{12} を直ちに求めることができる。逆に経度差 L_{12} から大円距離 σ_{12} を求める（上式の逆関数）には、繰り返し計算で漸近的に求める。その手順の詳細は第 7 節を参照。

式 (19) の誤差は e^7 のオーダー、すなわち、 10^{-8} のオーダーである。したがって、経度差 L_{12} の誤差は 10^{-6} deg ($\doteq 10^{-3}$ 秒) のオーダーである。

6. 第1問題 (direct problem) の解法

始点 P の地理緯度 ϕ_1 ・経度 L_1 ・方位角 α_1 とその始点 P からの距離 s_{12} を与えて、終点 Q の地理緯度 ϕ_2 ・経度 L_2 ・方位角 α_2 を求める。下記のフローに示すように、距離 s_{12} から繰り返し計算で媒介変数 σ_{12} を求め、それを使って経度差 L_{12} を求める。フローの左端の s_{12} と右端の L_{12} は回転楕円体に属し、中間の σ_{12} と λ_{12} は大円に属する。第8節の計算例の場合、繰り返し計算は約4~6回で収束した。

$$s_{12} \rightarrow \sigma_{12} \xrightarrow{\text{式(A4)}} \lambda_{12} \xrightarrow{\text{式(19)}} L_{12}$$

式(15)の繰り返し

この第1問題を解く計算手順を以下に記す。右欄の式番号の(1)などは本文の式番号を示し、(A2)などは付録Aの式番号を示す。

Step	計算式	式番号
1	$\theta_1 = \tan^{-1}((1-f)\tan\phi_1)$	(1)
2	$\sigma_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta_1}{\cos\alpha_1}\right)$	(A2)
3	$\sin\alpha_0 = \sin\alpha_1 \cdot \cos\theta_1$	(4)
4	$u^2 = \frac{e^2 \cos^2\alpha_0}{1-e^2}$	(12)
5	$A = 1 + \frac{u^2}{16384} \left(4096 + u^2 \left(-768 + u^2 \left(320 - 175u^2 \right) \right) \right)$ $B = \frac{u^2}{1024} \left(256 + u^2 \left(-128 + u^2 \left(74 - 47u^2 \right) \right) \right)$	(15)

Step 6 では、最初の式を σ_{12} の初期値とし、 σ_{12} の変化が収束するまで計算を繰り返す。

6	$\sigma_{12}^{(0)} = \frac{s_{12}}{bA}$ $2\sigma_m = 2\sigma_1 + \sigma_{12}^{(n)}$ $\Delta\sigma^{(n)} = B \sin \sigma_{12}^{(n)} \left(\cos 2\sigma_m + \frac{B}{4} \left(\cos \sigma_{12}^{(n)} (-1 + 2\cos^2 2\sigma_m) - \frac{B}{6} \cos 2\sigma_m (-3 + 4\sin^2 \sigma_{12}^{(n)}) (-3 + 4\cos^2 2\sigma_m) \right) \right)$ $\sigma_{12}^{(n+1)} = \frac{s_{12}}{bA} + \Delta\sigma^{(n)}$	(15)
---	--	------

7(※1)	$\theta_2 = \sin^{-1}(\sin \theta_1 \cdot \cos \sigma_{12} + \cos \theta_1 \cdot \sin \sigma_{12} \cdot \cos \alpha_1)$	(A3)
8	$\phi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\tan \theta_2}{1-f}\right)$	(1)
9(※2)	$\lambda_{12} = \cos^{-1}\left(\frac{\cos \sigma_{12} - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2}{\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2}\right)$	(A4)
10	$\cos^2 \alpha_0 = 1 - \sin^2 \alpha_0$	-
11	$C = \frac{f}{16} \cos^2 \alpha_0 (4 + f(4 - 3\cos^2 \alpha_0))$ $L_{12} = \lambda_{12} - (1 - C)f \sin \alpha_0 (\sigma_{12} + C \sin \sigma_{12} (\cos 2\sigma_m + C \cos \sigma_{12} (-1 + 2\cos^2 2\sigma_m)))$ $L_2 = L_1 + L_{12}$	(19)
12(※3)	$\alpha_2 = \cos^{-1}\left(\frac{-\sin \theta_1 + \cos \sigma_{12} \cdot \sin \theta_2}{\sin \sigma_{12} \cdot \cos \theta_2}\right)$	(A5)

計算終了

補足)

※1) 関連文書 1 では次式で θ_2 を計算している.

7	$\tan \theta_2 = \frac{\sin \theta_1 \cdot \cos \sigma_{12} + \cos \theta_1 \cdot \sin \sigma_{12} \cdot \cos \alpha_1}{\sqrt{\sin^2 \alpha_0 + (\sin \theta_1 \cdot \sin \sigma_{12} - \cos \theta_1 \cdot \cos \sigma_{12} \cdot \cos \alpha_1)^2}}$	
---	--	--

※2) 関連文書 1 では次式で λ_{12} を計算している.

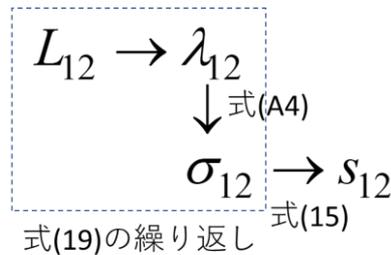
9	$\lambda_{12} = \tan^{-1}\left(\frac{\sin \sigma_{12} \cdot \sin \alpha_1}{\cos \theta_1 \cdot \cos \sigma_{12} - \sin \theta_1 \cdot \sin \sigma_{12} \cdot \cos \alpha_1}\right)$	
---	---	--

※3) 関連文書 1 では次式で α_2 を計算している.

12	$\alpha_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\sin \alpha_0}{-\sin \theta_1 \cdot \sin \sigma_{12} + \cos \theta_1 \cdot \cos \sigma_{12} \cdot \cos \alpha_1}\right)$	
----	---	--

7. 第2問題 (inverse problem) の解法

始点 P の地理緯度 ϕ_1 ・経度 L_1 と終点 Q の地理緯度 ϕ_2 ・経度 L_2 を与えて, 2 地点間の距離 s_{12} と 2 地点の方位角 α_1, α_2 を求める. 下記のフローに示すように, 経度差 L_{12} から繰り返し計算で媒介変数 λ_{12} と σ_{12} を求め, それを使って距離 s_{12} を求める. フローの左端の L_{12} と右端の s_{12} は回転楕円体に属し, 中間の σ_{12} と λ_{12} は大円に属する. 第 8 節の計算例の場合, 繰り返し計算は約 6 回で収束した.



この第 2 問題を解く計算手順を以下に記す. 右欄の式番号の(1)などは本文の式番号を示し, (A2)などは付録 A の式番号を示す.

Step	計算式	式番号
1	$\theta_1 = \tan^{-1}((1-f)\tan\phi_1)$ $\theta_2 = \tan^{-1}((1-f)\tan\phi_2)$	(1)
2	$L_{12} = L_2 - L_1$	-

Step 3 を λ_{12} の初期値とし, λ_{12} の変化が収束するまで Step 4~8 の計算を繰り返す.

3	$\lambda_{12}^{(0)} = L_{12}$	-
4 (※1)	$\sigma_{12} = \cos^{-1}(\sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 + \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \cdot \cos\lambda_{12}^{(n)})$	(A4)
5 (※2)	$\sin\alpha_1 = \frac{\cos\theta_2 \cdot \sin\lambda_{12}^{(n)}}{\sin\sigma_{12}}$ $\sin\alpha_0 = \sin\alpha_1 \cdot \cos\theta_1$	(A6) (4)
6	$\cos^2\alpha_0 = 1 - \sin^2\alpha_0$	-
7	$\cos 2\sigma_m = \cos\sigma_{12} - \frac{2\sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2}{\cos^2\alpha_0}$	(A7)

8	$C = \frac{f}{16} \cos^2 \alpha_0 (4 + f(4 - 3 \cos^2 \alpha_0))$ $\lambda_{12}^{(n)} = L_{12} + (1 - C) f \sin \alpha_0 (\sigma_{12} + C \sin \sigma_{12} (\cos 2\sigma_m + C \cos \sigma_{12} (-1 + 2 \cos^2 2\sigma_m)))$	(19)
---	--	------

9	$u^2 = \frac{e^2 \cos^2 \alpha_0}{1 - e^2}$	(12)
---	---	------

10	$A = 1 + \frac{u^2}{16384} (4096 + u^2 (-768 + u^2 (320 - 175u^2)))$ $B = \frac{u^2}{1024} (256 + u^2 (-128 + u^2 (74 - 47u^2)))$ $\Delta \sigma = B \sin \sigma_{12} \left(\cos 2\sigma_m + \frac{B}{4} \left(\cos \sigma_{12} (-1 + 2 \cos^2 2\sigma_m) - \frac{B}{6} \cos 2\sigma_m (-3 + 4 \sin^2 \sigma_{12}) (-3 + 4 \cos^2 2\sigma_m) \right) \right)$ $s_{12} = bA(\sigma_{12} - \Delta \sigma)$	(15)
----	--	------

11 (※3)	$\alpha_1 = \cos^{-1} \left(\frac{\sin \theta_2 - \cos \sigma_{12} \cdot \sin \theta_1}{\sin \sigma_{12} \cdot \cos \theta_1} \right)$ $\alpha_2 = \cos^{-1} \left(\frac{-\sin \theta_1 + \cos \sigma_{12} \cdot \sin \theta_2}{\sin \sigma_{12} \cdot \cos \theta_2} \right)$	(A3) (A5)
---------	--	--------------

計算終了

補足)

※1) 関連文書 1 では次の 3 式で σ_{12} を計算している.

4	$\sin \sigma_{12} = \sqrt{(\cos \theta_2 \cdot \sin \lambda_{12}^{(n)})^2 + (\cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \cos \lambda_{12}^{(n)})^2}$ $\cos \sigma_{12} = \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \cos \lambda_{12}^{(n)}$ $\sigma_{12} = \tan^{-1} \left(\frac{\sin \sigma_{12}}{\cos \sigma_{12}} \right)$	
---	---	--

※2) 関連文書 1 では 2 式をまとめて次式で α_0 を計算している.

5	$\sin \alpha_0 = \frac{\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \sin \lambda_{12}^{(n)}}{\sin \sigma_{12}}$	
---	--	--

※3) 関連文書 1 では次式で α_1, α_2 を計算している.

11	$\alpha_1 = \tan^{-1} \left(\frac{\cos \theta_2 \cdot \sin \lambda_{12}}{\cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \cos \lambda_{12}} \right)$ $\alpha_2 = \tan^{-1} \left(\frac{\cos \theta_1 \cdot \sin \lambda_{12}}{-\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \lambda_{12}} \right)$	
----	--	--

8. 大楕円航路

回転楕円体を任意の平面で切った断面は楕円 (ellipse) である。回転楕円体上の始点と終点の2点を通る断面の中で最大の楕円は、始点・終点・地心 (地球の中心) の3点を通る平面で切った断面であり、大楕円 (great ellipse) と呼ばれることもある。この大楕円を進む大楕円航路は直感的にイメージしやすく、測地線航路の計算と比較すると計算量が少ないため、大楕円航路を提案する文献もある。

しかし、大楕円航路の距離は、測地線航路の距離より少し長い。また、第2種不完全楕円積分または式 (15) の計算に帰着するため、結局は似たような計算になる。さらに、式 (4) の自転軸回りの角運動量保存則が成立しない。敢えて大楕円航路を推す理由は少ないため、計算方法の詳細は省略する。

9. 測地線の計算例

以下の計算例では、地球モデル WGS-84 より、地球の赤道半径 $a = 6,378,137$ m, 離心率 $e = 0.0818191908426$ とした。

【計算例 1】東京～ニューヨーク間の測地線

東京 (成田国際空港) とニューヨーク (ジョン・F・ケネディ国際空港) 間の測地線の第2問題を計算した結果を下表に示す。国土地理院の「距離と方位角の計算」サイトによる計算と比較すると、距離の差は 1 mm, 方位角の誤差は $0 \sim 1 \times 10^{-6}$ deg であり、よく一致する。

表 1 東京～ニューヨーク間の第2問題の計算結果

	計算結果	国土地理院	差
距離 s_{12} (m)	10855380.328	10855380.329	-0.001
方位角 α_1 (deg)	25.416267	25.416267	+0.000000
方位角 α_2 (deg)	152.686815	152.686814	+0.000001

次に、測地線の第1問題を解いて、Excel の「3D マップ」を利用して描いた 3D 地図を下図に示す。航路を 20 等分した点列で示している。北極圏を通過している。



図5 東京～ニューヨーク間の測地線

下図の横軸は始点からの距離, 縦軸は測地線と大楕円の偏差 (間隔) を示す. 縦軸の符号は, 始点から終点に向かって航路を進む際の左舷側を正とし, 右舷側を負とする. 測地線は大楕円よりも最大で約 7 km 左舷側, すなわち北側を通る. 測地線と大楕円の距離の差は約 8 m である.

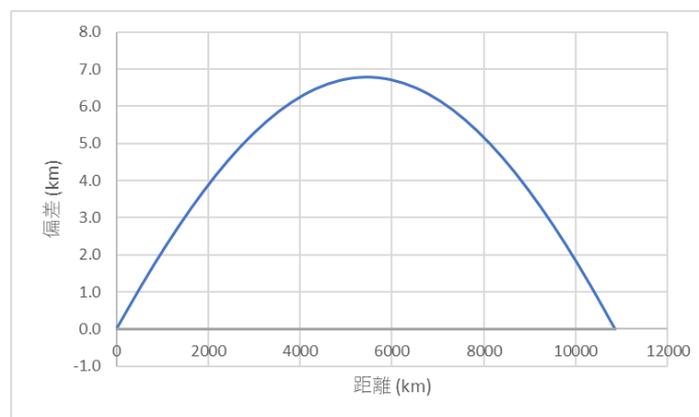


図6 東京～ニューヨーク間の測地線の大楕円からの偏差

【計算例 2】 ロンドン～東京間の測地線

ロンドン (ヒースロー国際空港) と東京 (成田国際空港) 間の測地線の第 2 問題を計算した結果を下表に示す. 国土地理院の「距離と方位角の計算」サイトによる計算と比較すると,

距離の差は 2 mm, 方位角の誤差は $\pm 1 \times 10^{-6}$ deg であり, よく一致する.

表 2 ロンドン～東京間の第 2 問題の計算結果

	計算結果	国土地理院	差
距離 s_{12} (m)	9615185.064	9615185.062	+0.002
方位角 α_1 (deg)	30.869696	30.869697	-0.000001
方位角 α_2 (deg)	156.783573	336.783572	+0.000001

次に, 測地線の第 1 問題を解いて, Excel の「3D マップ」を利用して描いた 3D 地図を下図に示す. 航路を 20 等分した点列で示している. 北極圏を通過している.

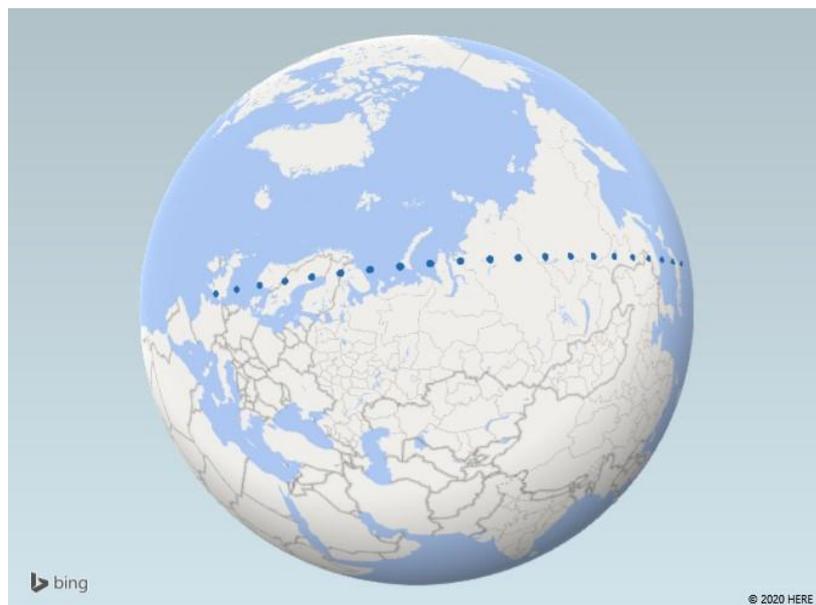


図 7 ロンドン～東京間の測地線航路

下図の横軸は始点からの距離, 縦軸は測地線と大楕円の偏差 (間隔) を示す. 測地線は大楕円よりも最大で約 4.5 km 左舷側, すなわち北側を通ることがわかる. 測地線と大楕円の距離の差は約 4 m である.

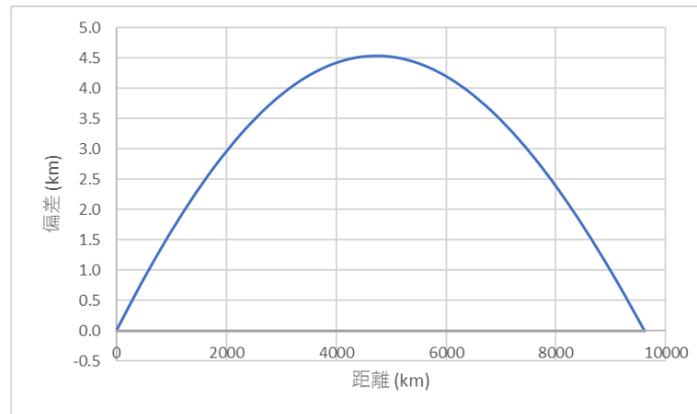


図8 ロンドン～東京間の測地線の大楕円からの偏差

【計算例3】東京～シドニー間の測地線

東京（成田国際空港）とシドニー（シドニー国際空港）間の測地線の第2問題を計算した結果を下表に示す。国土地理院の「距離と方位角の計算」サイトによる計算と比較すると、距離の差は0 mm、方位角の誤差は -1×10^{-6} deg であり、よく一致する。

表3 東京～シドニー間の第2問題の計算結果

	計算結果	国土地理院	差
距離 s_{12} (m)	7797047.729	7797047.729	0.000
方位角 α_1 (deg)	170.460788	170.460789	-0.000001
方位角 α_2 (deg)	170.670238	170.670239	-0.000001

次に、測地線の第1問題を解いて、Excelの「3Dマップ」を利用して描いた3D地図を下図に示す。航路を20等分した点列で示している。西太平洋を通過している。

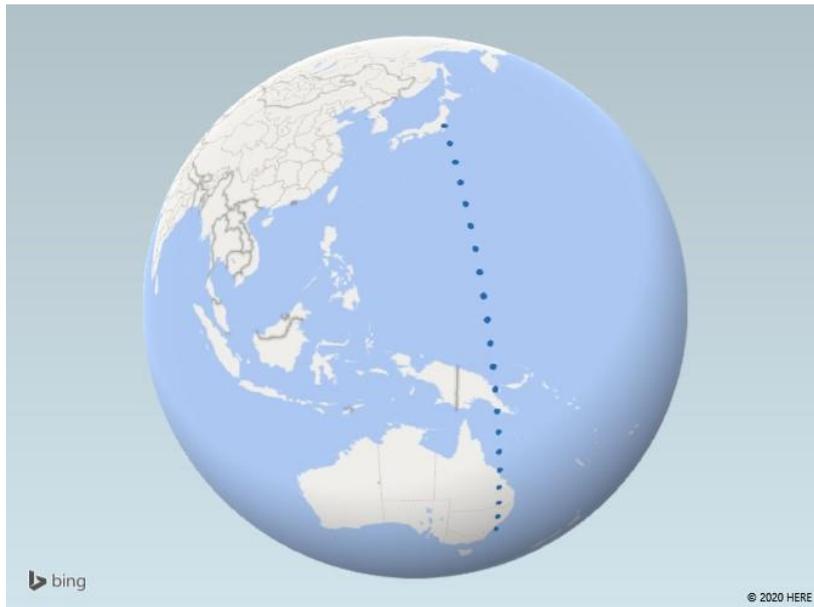


図9 東京～シドニー間の測地線

下図の横軸は始点からの距離, 縦軸は測地線と大楕円の偏差(間隔)を示す. 航路の前半(北半球側)では, 測地線は大楕円よりも最大で約 100 m 左舷側, すなわち東側を通り, 航路の後半(南半球側)では, 最大で約 70 m 右舷側, すなわち西側を通ることがわかる. 測地線と大楕円の距離の差はわずかに約 0.01 m である.

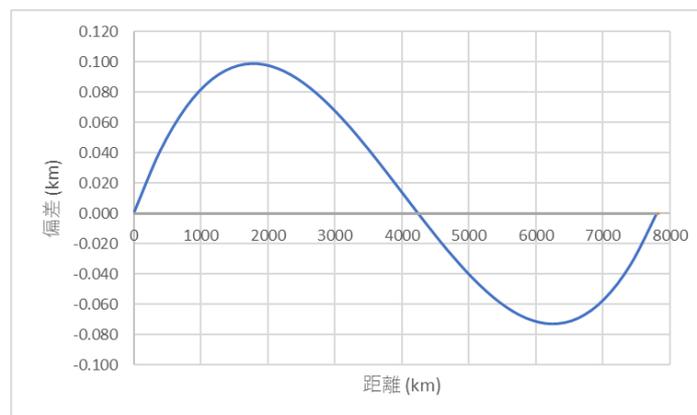


図10 東京～シドニー間の測地線の大楕円からの偏差

測地線は, 一般に, 北半球では大楕円の北側(北極寄り)を通過し, 南半球では測地線は大楕円の南側(南極寄り)を通過する. また, 測地線と大楕円の違い(間隔)は, 一般に, 東西方向(緯線方向)の航路では大きく, 南北方向(子午線方向)の航路では小さい.

10. 地球を一周する測地線

回転楕円体上のある地点を始点として、ある方位角で出た測地線が回転楕円体を一周した後、どの地点に戻るかを考える。媒介変数の大円距離 $\sigma_{12}=2\pi$ の位置を終点とすると、式 (A3) より、 $\theta_2=\theta_1(\equiv\theta)$ となる。すなわち、始点と終点の更成緯度 θ は等しい。もう一つの媒介変数の大円経度差 λ_{12} は、式 (A4) より $\lambda_{12}=2\pi$ となる。すなわち、図 4 右図の球の大円を一周する。始点と終点の経度差は、式 (19) に $\sigma_{12}=\lambda_{12}=2\pi$ を代入して、高次の項 (f^2 の項) を無視すると、

$$\begin{aligned} L_{12} &= 2\pi - 2\pi(1-C)f \sin \alpha_0 \\ &\cong 2\pi - 2\pi f \sin \alpha_0 \end{aligned}$$

となるが、経度差 L_{12} は 2π 周期であるから、 2π を引いて、

$$L_{12} \cong -2\pi f \sin \alpha_0$$

となる。上式の負号は終点が始点の西側（下図の左側）に来ることを意味する。始点と終点の自転軸からの距離はともに $a \cos \theta$ である（図 3 右図参照）から、経度方向の距離（下図の三角形の斜辺の長さ）は $a \cos \theta \cdot 2\pi f \sin \alpha_0$ である。

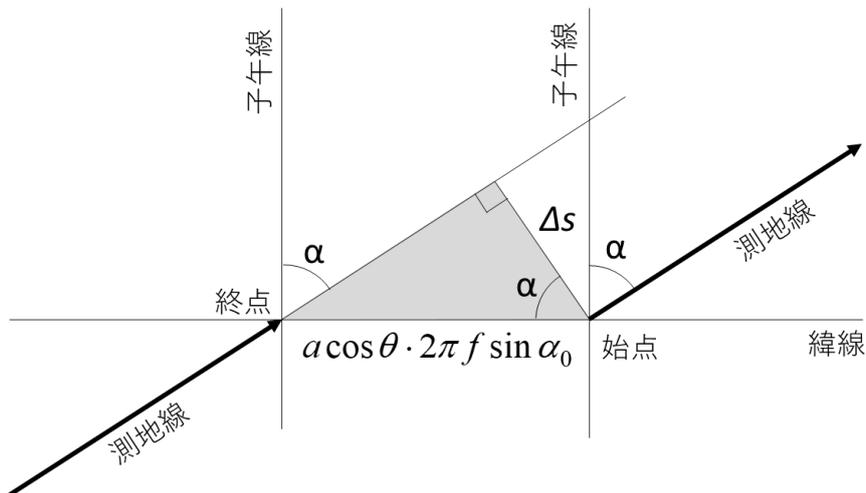


図 11 測地線と一周後の測地線の間隔

上図に示すように、測地線と一周後の測地線の間隔 Δs は、(経度方向の距離) $\times \cos \alpha$ であるから、

$$\begin{aligned}\Delta s &\cong a \cos \theta \cdot 2\pi f \sin \alpha_0 \cdot \cos \alpha \\ &= 2\pi a f \cos \theta (\sin \alpha \cos \theta) \cos \alpha \\ &= 2\pi a f \cos^2 \theta \sin \alpha \cos \alpha\end{aligned}$$

$$\therefore \Delta s \cong \pi a f \cos^2 \theta \sin 2\alpha \quad (20)$$

となる。途中で測地線の式 (4) を用いた。上式より、扁平率 f が大きいほど間隔 Δs が大きい。始点が高緯度に近づくと ($\theta \rightarrow \pm 90 \text{ deg}$)、測地線の間隔 Δs は小さくなる。測地線が子午線に近づくためである。

ある地点 (更成緯度 θ) から出る測地線のうち、方位角 $\alpha = 45 \text{ deg}$ (北東) または 135 deg (南東) の測地線の間隔 Δs (の絶対値) が最も大きい。例えば、地理緯度 $\phi = 35 \text{ deg}$, 方位角 $\alpha = 45 \text{ deg}$ の場合、測地線の間隔 $\Delta s \cong 44 \text{ km}$ となる。

関連文書等

- 1) T. Vincenty, Direct and Inverse Solutions of Geodesics on the Ellipsoid with Application of Nested Equations, Survey Review, Vol. XXIII, No. 176, 1975
- 2) 長坂直彦, 回転楕円体上の測地線及び航程線の算出について, 海上保安庁 海洋技術部 研究報告 第 50 号, 2013
- 3) 国土地理院, 距離と方位角の計算,
<https://vldb.gsi.go.jp/sokuchi/surveycalc/surveycalc/bl2stf.html>
- 4) 国立研究開発法人 量子科学技術研究開発機構 放射線医学総合研究所, 航路線量計算システム (JISCARD), <http://www.jiscard.jp/index.shtml> (空港の緯度・経度データを利用した.)
- 5) 丸山卓男, 地球楕円体を一周する測地線について, 日本地震学会編 地震, 第 20 巻, p.50-53, 1967
- 6) E. J. Krakiwsky, D. B. Thomson, Geodetic Position Computations, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, Lecture Notes No. 39, 1974
- 7) 数学ハンドブック編集委員会編, 理工学のための数学ハンドブック 第 4 版, 1974, 丸善株式会社

付録 A 球面三角法に関する証明

球上の2地点P, Qを通る大円航路を下図に示す. 2地点P, Qの緯度をそれぞれ θ_1, θ_2 とし, 経度差を λ_{12} とする. 北極を点Nとし, 大円と赤道の交点を点Eとする. 大円上の距離EP, PQをそれぞれ σ_1, σ_{12} とする.

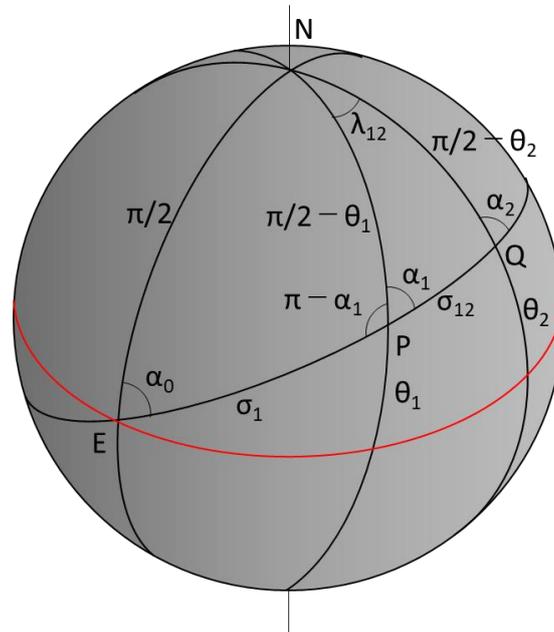


図 A1 球面上の大円航路

球面三角形 NEP を考える. 頂点 E の頂角 α_0 を夾角として球面三角形の余弦定理を適用すると,

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) &= \cos\sigma_1 \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \sin\sigma_1 \cdot \sin\frac{\pi}{2} \cdot \cos\alpha_0 \\ \therefore \sin\theta_1 &= \sin\sigma_1 \cdot \cos\alpha_0 \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

となる. この関係は, 点 P に限らず, 同じ大円上の任意の点で成り立つ. それが本文の式 (9) である. 同じ球面三角形 NEP に, 頂点 P の頂角 ($\pi - \alpha_1$) を夾角として余弦定理を適用すると,

$$\begin{aligned} \cos\frac{\pi}{2} &= \cos\sigma_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) + \sin\sigma_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) \cdot \cos(\pi - \alpha_1) \\ \therefore 0 &= \cos\sigma_1 \cdot \sin\theta_1 - \sin\sigma_1 \cdot \cos\theta_1 \cdot \cos\alpha_1 \\ \therefore \tan\sigma_1 &= \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1 \cdot \cos\alpha_1} = \frac{\tan\theta_1}{\cos\alpha_1} \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

となる. ただし, 頂点 P が赤道にあって ($\theta_1=0$), 方位角 α_1 が 90 deg (東向き) の場合, 右辺は 0/0 となり σ_1 は不定となる. 次に, 球面三角形 NPQ に, 頂点 P の頂角 α_1 を夾角として余弦定理を適用すると,

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right) \cdot \cos\sigma_{12} + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right) \cdot \sin\sigma_{12} \cdot \cos\alpha_1 \\ \therefore \sin\theta_2 &= \sin\theta_1 \cdot \cos\sigma_{12} + \cos\theta_1 \cdot \sin\sigma_{12} \cdot \cos\alpha_1\end{aligned}\quad (\text{A3})$$

となる。同じ球面三角形 NPQ に、頂点 N の頂角 λ_{12} を夾角として余弦定理を適用すると、

$$\begin{aligned}\cos\sigma_{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right) \cos\lambda_{12} \\ \therefore \cos\sigma_{12} &= \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 + \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \cdot \cos\lambda_{12} \\ \therefore \cos\lambda_{12} &= \frac{\cos\sigma_{12} - \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2}{\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2}\end{aligned}\quad (\text{A4})$$

となる。同じ球面三角形 NPQ に、頂点 Q の頂角 $(\pi - \alpha_2)$ を夾角として余弦定理を適用すると、

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right) &= \cos\sigma_{12} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right) + \sin\sigma_{12} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right) \cdot \cos(\pi - \alpha_2) \\ \therefore \sin\theta_1 &= \cos\sigma_{12} \cdot \sin\theta_2 - \sin\sigma_{12} \cdot \cos\theta_2 \cdot \cos\alpha_2 \\ \therefore \cos\alpha_2 &= \frac{-\sin\theta_1 + \cos\sigma_{12} \cdot \sin\theta_2}{\sin\sigma_{12} \cdot \cos\theta_2}\end{aligned}\quad (\text{A5})$$

となる。同じ球面三角形 NPQ に、正弦定理を適用すると、

$$\begin{aligned}\frac{\sin\sigma_{12}}{\sin\lambda_{12}} &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right)}{\sin\alpha_1} \\ \therefore \frac{\sin\sigma_{12}}{\sin\lambda_{12}} &= \frac{\cos\theta_2}{\sin\alpha_1} \\ \therefore \sin\alpha_1 &= \frac{\cos\theta_2 \cdot \sin\lambda_{12}}{\sin\sigma_{12}}\end{aligned}\quad (\text{A6})$$

となる。大円距離 σ_{12} と中間地点の距離 σ_m との関係は、

$$\begin{aligned}\cos 2\sigma_m - \cos\sigma_{12} &= -2 \sin \frac{2\sigma_m + \sigma_{12}}{2} \cdot \sin \frac{2\sigma_m - \sigma_{12}}{2} \\ &= -2 \sin \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) + (\sigma_2 - \sigma_1)}{2} \cdot \sin \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) - (\sigma_2 - \sigma_1)}{2} \\ &= -2 \sin\sigma_2 \cdot \sin\sigma_1 \\ \therefore \cos 2\sigma_m &= \cos\sigma_{12} - 2 \sin\sigma_2 \cdot \sin\sigma_1\end{aligned}$$

となる。上式の右辺に大円距離の式 (A1) を代入すると、

$$\begin{aligned}\cos 2\sigma_m &= \cos\sigma_{12} - 2 \frac{\sin\theta_1}{\cos\alpha_0} \cdot \frac{\sin\theta_2}{\cos\alpha_0} \\ \therefore \cos 2\sigma_m &= \cos\sigma_{12} - \frac{2 \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2}{\cos^2\alpha_0}\end{aligned}\quad (\text{A7})$$

となる。

付録 B 回転楕円体の曲率半径

回転楕円体上の任意の点の法線を含む平面（すなわち，その点における接平面に直交する平面）で，回転楕円体を任意の方位角で切った楕円断面の曲率半径（radius of curvature）を求める．その点の子午線（南北方向，方位角 0 deg）で回転楕円体を切った断面の曲率半径を R_N とし，卯酉線（東西方向，方位角 90 deg）で切った回転楕円体の断面の曲率半径を R_E とする．これらの曲率半径を主曲率半径と言い，更成緯度 θ または地理緯度 ϕ を使って次表のように計算される（証明省略）．式中の a は回転楕円体の赤道半径である．

表 B1 回転楕円体の曲率半径

	更成緯度 θ	地理緯度 ϕ
子午線の曲率半径 R_N	$R_N = \frac{a(1 - e^2 \cos^2 \theta)^{1.5}}{\sqrt{1 - e^2}}$	$R_N = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1.5}}$
卯酉線の曲率半径 R_E	$R_E = \frac{a\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}}{\sqrt{1 - e^2}}$	$R_E = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}}$

横軸に地理緯度 ϕ ，縦軸に主曲率半径 R_N と R_E を取ったプロットを下図に示す．図からわかるように，北極（緯度 90 deg）で，両曲線は一致する．北極では子午線と卯酉線が一致する（区別できなくなる）ためである．また，赤道（緯度 0 deg）における卯酉線の曲率半径 R_E （橙色線の左端）は地球の赤道半径 $a = 6378137$ m である．緯度 0 deg では卯酉線は赤道に一致するためである．

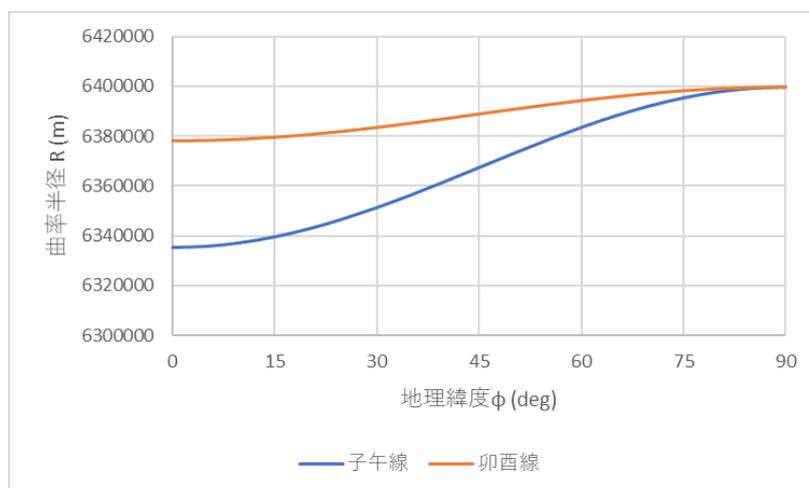


図 B1 回転楕円体の曲率半径

回転楕円体を任意の方位角 α ($0 \sim 180 \text{ deg}$) で切った断面の曲率半径 R_α を求める。下図は、回転楕円体上の点 P の近傍の断面を示す。Z 軸は法線方向、Y 軸は子午線方向、X 軸は卯酉線方向である。点 P と P' は切断面上の点であり、線分 PP' と子午線 (Y 軸) のなす角度が方位角 α である。点 P と P' は微小距離 ds だけ離れている。平面 AA' は点 P における接平面であり、平面 BB' は、点 P' を通り、接平面 AA' に平行な平面である。両平面の間隔を z とする。上側の円弧は、XZ 平面で回転楕円体を切った断面 (楕円の一部) であり、下側の楕円は XY 平面で回転楕円体を切った断面である。

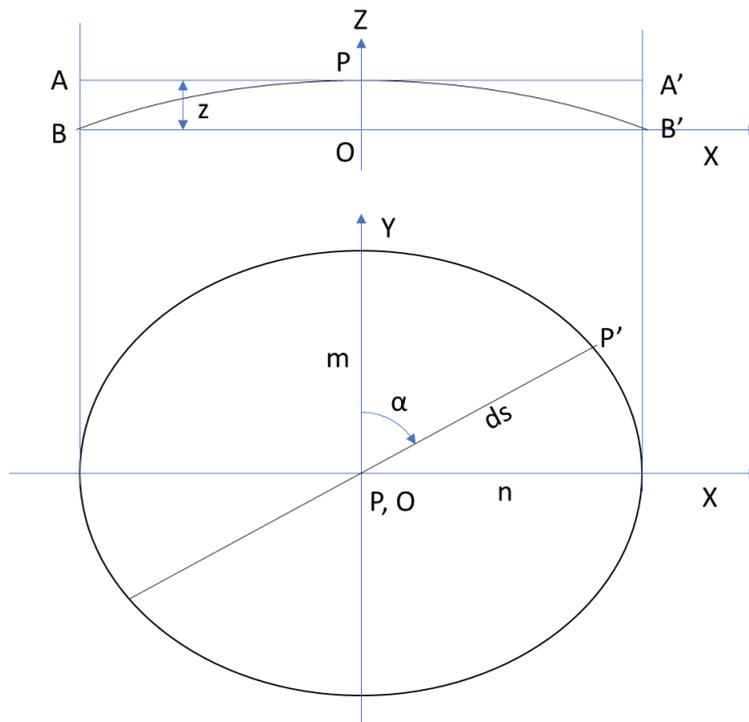


図 B2 回転楕円体の微小断面

下側の楕円断面上の点 P' の座標 (x, y) は、距離 ds と方位角 α を用いて、

$$\begin{aligned} x &= ds \sin \alpha \\ y &= ds \cos \alpha \end{aligned} \tag{B1}$$

と表される。上図に示すように楕円の長半径を n 、短半径を m とすると、

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{n^2} + \frac{y^2}{m^2} &= 1 \\ \therefore \frac{ds^2 \sin^2 \alpha}{n^2} + \frac{ds^2 \cos^2 \alpha}{m^2} &= 1 \end{aligned} \tag{B2}$$

となる．ここで，切断面 PP' で回転楕円体を（斜めに）切った断面を下図に示す．

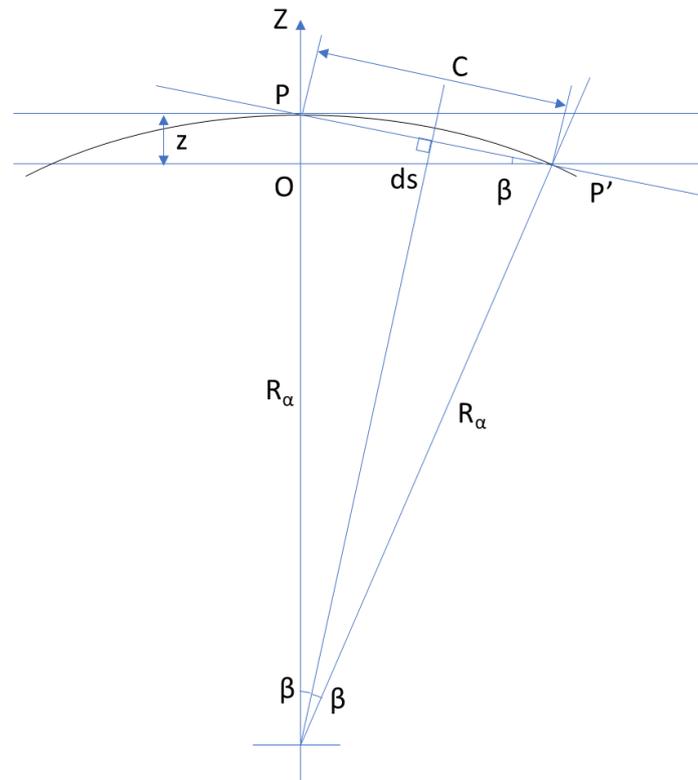


図 B3 回転楕円体の微小断面（方位角方向）

上図において，線分 PP' と線分 OP' のなす角度を β とし，線分 PP' の長さを c とすると，

$$\sin \beta = \frac{z}{c} \quad (\text{B3})$$

と表される．また，同じ角度 β は曲率半径 R_α を用いて，

$$\sin \beta = \frac{c/2}{R_\alpha} = \frac{c}{2R_\alpha} \quad (\text{B4})$$

とも表される．したがって，両式より角度 β を消去して，

$$\begin{aligned}\frac{z}{c} &= \frac{c}{2R_\alpha} \\ \therefore z &= \frac{c^2}{2R_\alpha}\end{aligned}\tag{B5}$$

となり、 z が c と R_α で表された。ここで、角度 θ は微小角度であるから、

$$ds = c \cos \theta \cong c\tag{B6}$$

と近似できる。上の2式より、

$$z = \frac{ds^2}{2R_\alpha}\tag{B7}$$

となり、 z が ds と R_α で表された。ここで、方位角 $\alpha = 0 \text{ deg}$ のときは、 $ds = m$ 、および $R_\alpha = R_N$ であるから、

$$z = \frac{m^2}{2R_N}\tag{B8}$$

である。また、方位角 $\alpha = 90 \text{ deg}$ のときは、 $ds = n$ 、および $R_\alpha = R_E$ であるから、

$$z = \frac{n^2}{2R_E}\tag{B9}$$

である。よって、式(B7)と(B8)より、 z を消去すると、

$$\begin{aligned}\frac{ds^2}{2R_\alpha} &= \frac{m^2}{2R_N} \\ \therefore m^2 &= \frac{R_N ds^2}{R_\alpha}\end{aligned}\tag{B10}$$

となり、楕円の短半径 m が求められた。同様に、式(B7)と(B9)より、

$$\begin{aligned}\frac{ds^2}{2R_\alpha} &= \frac{n^2}{2R_E} \\ \therefore n^2 &= \frac{R_E ds^2}{R_\alpha}\end{aligned}\tag{B11}$$

となり，楕円の長半径 n が求められた．これらの式(B10)と(B11)を式(B2)に代入すると，

$$\begin{aligned}\frac{ds^2 \sin^2 \alpha}{R_E ds^2} + \frac{ds^2 \cos^2 \alpha}{R_N ds^2} &= 1 \\ \therefore \frac{\sin^2 \alpha}{R_E} + \frac{\cos^2 \alpha}{R_N} &= \frac{1}{R_\alpha}\end{aligned}\tag{B12}$$

となる．すなわち，任意の方位角断面の曲率 ($1/R_\alpha$) は，子午線断面の曲率 ($1/R_N$) と卯酉線断面の曲率 ($1/R_E$) にそれぞれ $\cos^2 \alpha$ と $\sin^2 \alpha$ で重みを付けて平均した値である．方位角 $\alpha = 0 \text{ deg}$ の場合は子午線の曲率半径 R_N に一致し，方位角 $\alpha = 90 \text{ deg}$ の場合は卯酉線の曲率半径 R_E に一致する．上式をオイラー (Euler) の定理とも言う．上式を変形すると，

$$R_\alpha = \frac{R_N R_E}{R_N \sin^2 \alpha + R_E \cos^2 \alpha}\tag{B13}$$

とも表される．なお，測地学の分野では，子午線曲率半径 R_N を記号 M ，卯酉線曲率半径 R_E を記号 N で表して，

$$R_\alpha = \frac{MN}{M \sin^2 \alpha + N \cos^2 \alpha}$$

と表すことが多い．