

6.4 アラン分散の定義と測定

慣性計測技術において、角速度センサと加速度センサのノイズの表現方法として広く使われているアラン分散 (Allan variance) について記す。アラン分散のアランとは、米国の原子時計の研究者 D. W. Allan (1936～) である。ノイズ $x(t)$ のアラン分散 $\sigma(\tau)$ は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2(\tau) &= \frac{1}{2} \langle (\bar{x}_k(\tau) - \bar{x}_{k+1}(\tau))^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2(K-1)} \sum_{k=1}^{K-1} (\bar{x}_k(\tau) - \bar{x}_{k+1}(\tau))^2 \\ K &= \frac{N}{m}, \quad \tau = m\Delta t \end{aligned} \right\} \quad (6.49)$$

で定義される。なお、古い文献では係数 1/2 のない $\sigma^2(\tau) = \langle (\bar{x}_{k+1}(\tau) - \bar{x}_k(\tau))^2 \rangle$ をアラン分散と定義としているものもある。

アラン分散の測定の手順を次に示す。

- (1) 温度一定で振動のない試験室または恒温槽にセンサを入れて、静止状態に保つ。
- (2) センサの電源を入れて、出力が安定するまで待つ。
- (3) 一定のサンプリング速度（一定の時間間隔 Δt ）で、予め決めたデータ数 N を超えるまでサンプリングを続ける。データ数 N は 2^n 個（例えば、1024, 2048, 4096, ...）とする。全体の計測時間 T は $N\Delta t$ となる。

アラン分散の計算の手順を次に示す。四則演算のみの簡単な計算である。

- (1) 総数 N 個のデータを m 個 ($m = 1, 2, 4, \dots, N/2$) ずつのグループに分ける。グループの数は $K = N/m$ 個となる。一つのグループの時間は $\tau = m\Delta t$ ($\tau = \Delta t, 2\Delta t, \dots, T/2$) である。
- (2) 各グループ内のデータの平均値を求める。 k 番目のグループの平均値を $\bar{x}_k(\tau)$ とする。
- (3) k 番目のグループの平均値 $\bar{x}_k(\tau)$ と、 $(k+1)$ 番目のグループの平均値 $\bar{x}_{k+1}(\tau)$ の差を求める。グループの数は k 個であるから、平均値の差 $\bar{x}_k(\tau) - \bar{x}_{k+1}(\tau)$ の個数は $(k-1)$ 個となる。
- (4) 平均値の差 $\bar{x}_k(\tau) - \bar{x}_{k+1}(\tau)$ の二乗の平均値を求める。この値の 1/2 が、時間 τ に対するアラン分散の二乗 $\sigma^2(\tau)$ である。
- (5) 以上の計算をグループ内のデータ数 $m = 1, 2, 4, \dots, N/2$ に対して行う。

Example

簡単な例として、 $N=16$ 個のデータを使ってアラン分散を求める場合を図 6.6 に示す。

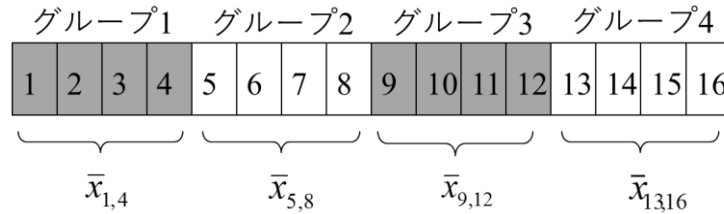


図 6.6 アラン分散の計算

先ず、データ 1 個 ($m=1$) を 1 グループとすると、グループの数は $K=16$ 個であり、サンプリング時間間隔 Δt におけるアラン分散は、

$$\sigma^2(\Delta t) = \frac{1}{2 \times 15} \left((x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{15} - x_{16})^2 \right)$$

となる。データ 2 個 ($m=2$) を 1 グループとすると、グループの数は $K=8$ 個であり、サンプリング時間間隔の 2 倍の時間の $2\Delta t$ におけるアラン分散は、

$$\sigma^2(2\Delta t) = \frac{1}{2 \times 7} \left((\bar{x}_{1,2} - \bar{x}_{3,4})^2 + (\bar{x}_{3,4} - \bar{x}_{5,6})^2 + \dots + (\bar{x}_{13,14} - \bar{x}_{15,16})^2 \right)$$

となる。ここに、記号 $\bar{x}_{n,m}$ は、 n 番目から m 番目までのデータの平均値を示す。図 6.6 に示すように、データ 4 個 ($m=4$) を 1 グループとすると、グループの数は $K=4$ 個であり、サンプリング時間の 4 倍の時間の $4\Delta t$ におけるアラン分散は、

$$\sigma^2(4\Delta t) = \frac{1}{2 \times 3} \left((\bar{x}_{1,4} - \bar{x}_{5,8})^2 + (\bar{x}_{5,8} - \bar{x}_{9,12})^2 + (\bar{x}_{9,12} - \bar{x}_{13,16})^2 \right)$$

となる。最後に、サンプリング時間の 8 倍の時間の $8\Delta t$ 、すなわち全体の計測時間 T の $1/2$ におけるアラン分散は、

$$\sigma^2(8\Delta t) = \frac{1}{2 \times 1} (\bar{x}_{1,8} - \bar{x}_{9,16})^2$$

となる。

角速度センサにおける様々なノイズのアラン分散を式 (6.49) に従って求めて両対数グラフにプロットすると，図 6.7 に模式的に示すようなグラフになる．すべてのセンサに図のすべてのノイズが含まれるという意味ではない．どのノイズが含まれるかは，センサの種類による．

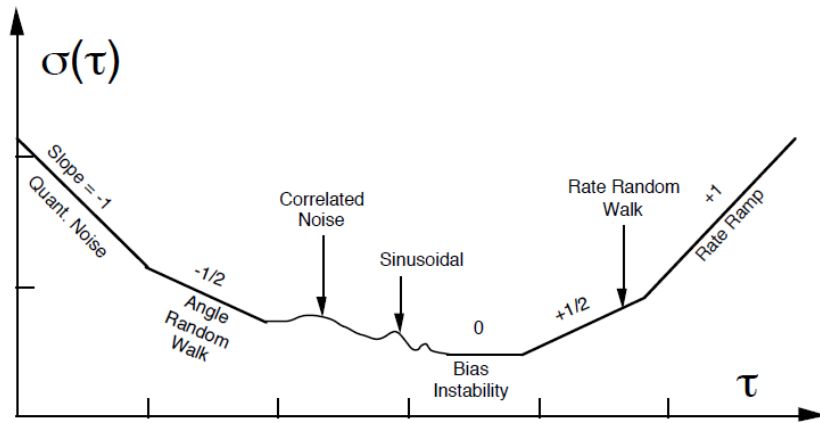


Figure C.8— $\sigma(\tau)$ Sample plot of Allan variance analysis results

図 6.7 アラン分散 (文献 2 より)

この図の縦軸がアラン分散 $\sigma(t)$ ，横軸が時間 (または相関時間) τ である．このような曲線から，角速度センサの出力に含まれているノイズの種類とその大きさを読み取ることができる．加速度センサについても同様である．アラン分散から読み取ることができる角速度センサのノイズと加速度センサのノイズの名称を表 6.4 に示す．

表 6.4 アラン分散とノイズ

| | アラン分散 | 角速度センサ | 加速度センサ |
|---|---------------|--------------|-------------|
| 1 | 傾き $-1/2$ の直線 | アングルランダムウォーク | 速度ランダムウォーク |
| 2 | 傾き 0 の直線 | $1/f$ ノイズ | |
| 3 | 傾き $+1/2$ の直線 | レートランダムウォーク | 加速度ランダムウォーク |
| 4 | 上に凸の山形 | マルコフノイズ | |
| 5 | 表現されない | ランダムバイアス | |

- (1) 傾きが $-1/2$ の直線はホワイトノイズを示す。角速度のホワイトノイズを時間で積分すると角度のランダムウォークとなることから、角速度センサのホワイトノイズを「アングルランダムウォーク」と言う。同様に、加速度のホワイトノイズを時間で積分すると速度のランダムウォークとなることから、加速度センサのホワイトノイズを「速度ランダムウォーク」と言う。
- (2) 傾きが 0 の直線は「 $1/f$ ノイズ」を示す。「バイアス不安定」とも言う。
- (3) 傾きが $+1/2$ の直線は「ランダムウォーク」を示す。角速度センサのランダムウォークをレートランダムウォークと言う。
- (4) 上に凸の山形は「マルコフノイズ」を示す。
- (5) 時間的に一定なバイアスは式 (6.49) の計算過程で消えてしまうため、「ランダムバイアス」はアラン分散では表現されない。

Note

数学的用語では、分散 (variance) は偏差 (deviation) の二乗であるから、 $\sigma^2(\tau)$ をアラン分散 (Allan variance), $\sigma(\tau)$ をアラン偏差 (Allan deviation) と呼んで区別することもある。しかし、一般に $\sigma(\tau)$ をアラン分散と言うことが多く、本書もそれに従う。

6.5 アラン分散とパワースペクトル密度

定常的なノイズのパワースペクトル密度 $S(\omega)$ は、次の式を使ってアラン分散 $\sigma(\tau)$ に変換することができる。

$$\sigma^2(\tau) = 4 \int_0^{\infty} S(f) \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} df \quad (6.50)$$

アラン分散の定義の式 (6.49) からこの式を導出する過程は、少し長くなるので付録とする。

式 (6.50) の積分記号の中に、変数 $\pi f \tau$ が分母と分子にある。そこで、

$$u = \pi f \tau \quad (6.51)$$

と変数変換すると、

$$f = \frac{u}{\pi\tau}, \quad df = \frac{du}{\pi\tau}$$

であるから,

$$\sigma^2(u) = \frac{4}{\pi\tau} \int_0^\infty S(u) \frac{\sin^4 u}{u^2} du \quad (6.52)$$

と表すこともできる.

6.6 ノイズのアラン分散

6.6.1 ホワイトノイズ

ホワイトノイズのパワースペクトル密度 S は, 式 (6.16) の記号 σ_w を N と書き改めて,

$$S(\omega) = N^2 \quad (6.53)$$

と表される. ノイズ信号の単位を $[x]$ とすると, 係数 N の単位は $[x]/\sqrt{\text{Hz}}$ である. この式を変換式 (6.52) に代入すると, ホワイトノイズのアラン分散 $\sigma(\tau)$ は,

$$\begin{aligned} \sigma^2(\tau) &= \frac{4}{\pi\tau} \int_0^\infty S(u) \frac{\sin^4 u}{u^2} du = \frac{4}{\pi\tau} \int_0^\infty N^2 \frac{\sin^4 u}{u^2} du \\ &= \frac{4N^2}{\pi\tau} \int_0^\infty \frac{\sin^4 u}{u^2} du = \frac{4N^2}{\pi\tau} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{N^2}{\tau} \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma(\tau) = \frac{N}{\sqrt{\tau}} \quad (6.54)$$

となる. ここに, 定積分の公式: $\int_0^\infty \frac{\sin^4 u}{u^2} du = \frac{\pi}{4}$ を使った. ホワイトノイズのアラン分散 $\sigma(\tau)$ は時間 τ の 1/2 乗に反比例する. 両対数グラフにプロットすると, 図 6.8 に示すように傾きが $-1/2$ の直線となる.

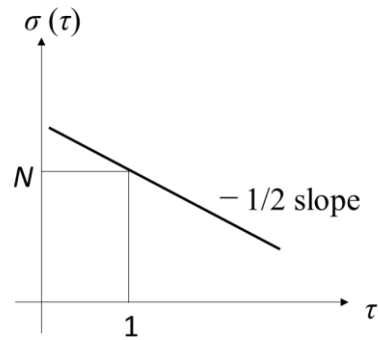


図 6.8 ホワイトノイズのアラン分散の模式図

ホワイトノイズのパワースペクトル密度の平方根 N の値は、式 (6.54) より、時間 $\tau=1$ におけるアラン分散の値 $\sigma(1)$ となる。ただし、これは数値上のことであり、アラン分散 $\sigma(\tau)$ の単位と係数 N の単位は異なることに注意が必要である。

$$\sigma(1) = \frac{N}{\sqrt{1}} = N$$

離散過程のホワイトノイズは、時間間隔 Δt の間にデータの平均化を行うとすると、

$$\left. \begin{aligned} x_k &= w_k, \quad w_k \sim N(0, \sigma^2) \\ \sigma^2 &= \left(\frac{N}{\sqrt{\Delta t}} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (6.55)$$

と表される。

Excel を使って生成した離散過程のホワイトノイズ x_k の 4 例を図 6.9 に示す。パワースペクトル密度の係数 $N=0.1$ 、時間間隔 $\Delta t=0.1$ とした。波形を見やすくするため、一定のバイアスを付加している。

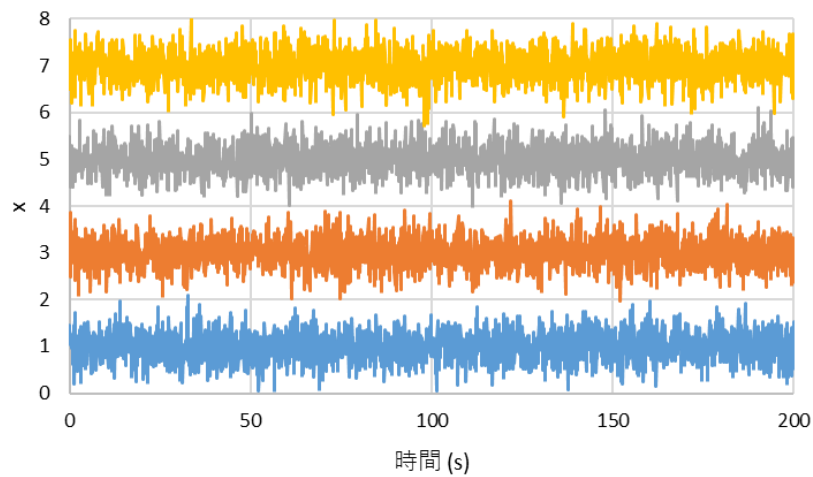


図 6.9 ホワイトノイズの時系列データ

生成したホワイトノイズに対して，式 (6.49) を使ってアラン分散を計算して両対数グラフにプロットした結果を図 6.10 に示す．確かに，傾きが $-1/2$ の直線となり，時間 $\tau=1$ における値は $N=0.1$ となっている．グラフの右側に行くほど，データ群の数が小さくなるため，プロットのばらつきは大きくなる．

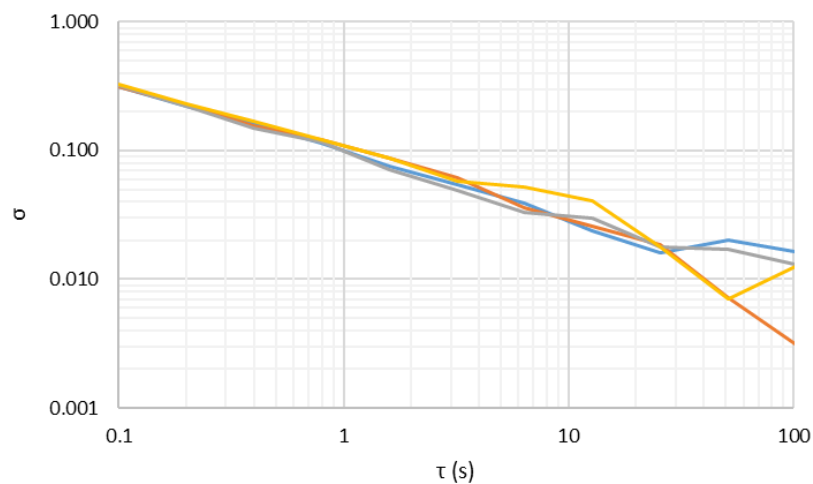


図 6.10 ホワイトノイズのアラン分散

6.6.2 $1/f$ ノイズ

$1/f$ ノイズとは，パワースペクトル密度 S が振動数 f に反比例するノイズである． $1/f$ ノイズのパワースペクトル密度 S は，式 (6.48) の記号 σ_w を B と書き改めて，

$$S(\omega) = \frac{B^2}{\omega} \tag{6.56}$$

と表される。ノイズ信号の単位を $[x]$ とすると、係数 B の単位も $[x]$ である。振動数 f および式 (6.51) の変数 u に変数変換すると、

$$\left. \begin{aligned} S(f) &= \frac{B^2}{2\pi f} \\ S(u) &= \frac{B^2}{2\pi \frac{u}{\pi\tau}} = \frac{B^2\tau}{2u} \end{aligned} \right\} \tag{6.57}$$

となる。パワースペクトル密度 $S(u)$ を変換式 (6.52) に代入すると、 $1/f$ ノイズのアラン分散は、

$$\begin{aligned} \sigma^2(\tau) &= \frac{4}{\pi\tau} \int_0^\infty \frac{B^2\tau}{2u} \frac{\sin^4 u}{u^2} du = \frac{2B^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^4 u}{u^3} du = \frac{2B^2}{\pi} \ln 2 \\ &= \frac{2\ln 2}{\pi} B^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma(\tau) = \sqrt{\frac{2\ln 2}{\pi}} B \cong 0.664 B \tag{6.58}$$

となる。ここに、定積分の公式： $\int_0^\infty \frac{\sin^4 u}{u^3} du = \ln 2$ を使った。アラン分散 $\sigma(\tau)$ は時間 τ に依存しない。両対数グラフにプロットすると、図 6.11 に示すように、傾きが 0 の直線となる。 $1/f$ ノイズのパワースペクトル密度の大きさを表す係数 B の値は、式 (6.58) よりアラン分散の平坦な部分の縦軸の値を定数 0.664 で除した値である。プロットに明確な平坦部がないときは極小値を使う。しかし、極小値そのものを $1/f$ ノイズの値と定義している文献も少なくない。アラン分散のグラフが記載されていれば、どちらの定義を使っているかが判断できる。

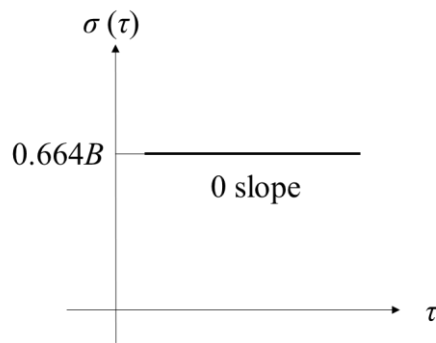


図 6.11 $1/f$ ノイズのアラン分散の模式図

Excel を使って生成した離散過程の $1/f$ ノイズの 4 例を図 6.12 に示す。 $1/f$ ノイズのパワースペクトル密度の大きさを表す係数 $B=0.1$ ，時間間隔 $\Delta t=0.1$ とした。 波形を見やすくするため，一定のバイアスを付加している。 離散過程の $1/f$ ノイズを生成する方法は文献 3 の方法を利用した。

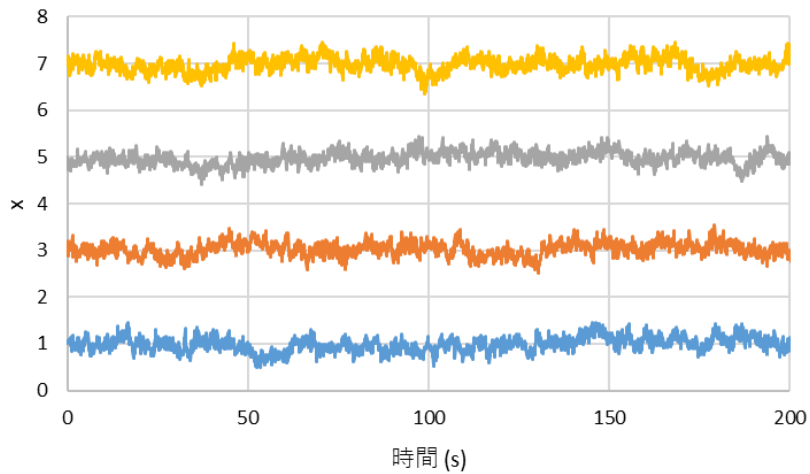


図 6.12 $1/f$ ノイズの時系列データ

生成した $1/f$ ノイズに対して，式 (6.49) を使ってアラン分散を計算して両対数グラフにプロットした結果を図 6.13 に示す。 確かに，傾きがほぼ 0 の直線となり，係数 0.664 で除した値は $B=0.1$ となっている。

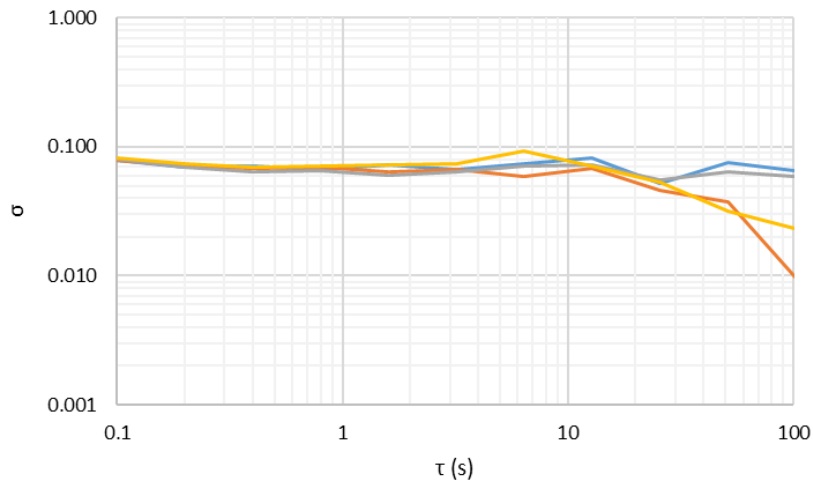


図 6.13 $1/f$ ノイズのアラン分散

6.6.3 ランダムウォーク

ランダムウォークのパワースペクトル密度は，式 (6.47) の記号 σ_w を K と書き改めて，

$$S(\omega) = \frac{K^2}{\omega^2} \quad (6.59)$$

と表される．ノイズ信号の単位を $[x]$ とすると，係数 K の単位は $[x]/\sqrt{s}$ である．振動数 f および式 (6.51) の変数 u に変数変換すると，

$$\left. \begin{aligned} S(f) &= \frac{K^2}{(2\pi f)^2} \\ S(u) &= \frac{K^2}{\left(2\pi \frac{u}{\pi\tau}\right)^2} = \frac{K^2\tau^2}{4u^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.60)$$

となる．パワースペクトル密度 $S(u)$ を変換式 (6.52) に代入すると，ランダムウォークアラン分散は，

$$\begin{aligned}\sigma^2(\tau) &= \frac{4}{\pi\tau} \int_0^\infty \frac{K^2\tau^2}{4u^2} \frac{\sin^4 u}{u^2} du = \frac{4}{\pi\tau} \frac{K^2\tau^2}{4} \int_0^\infty \frac{\sin^4 u}{u^4} du \\ &= \frac{K^2\tau}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^4 u}{u^4} du = \frac{K^2\tau}{\pi} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{K^2\tau}{3}\end{aligned}$$

$$\therefore \sigma(\tau) = K\sqrt{\frac{\tau}{3}} \quad (6.61)$$

となる。ここに、定積分の公式： $\int_0^\infty \frac{\sin^4 u}{u^4} du = \frac{\pi}{3}$ を使った。アラン分散 $\sigma(\tau)$ は時間 τ の 1/2 乗に比例する。アラン分散を両対数グラフにプロットすると、図 6.14 に示すように、傾きが +1/2 の直線となる。

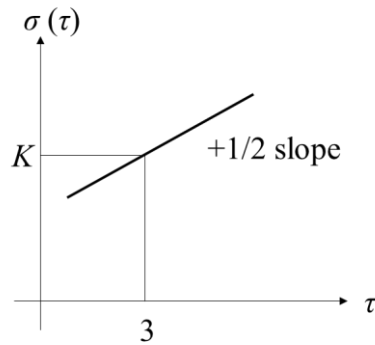


図 6.14 ランダムウォークのアラン分散の模式図

ランダムウォークのパワースペクトル密度の大きさを表す係数 K の値は、式 (6.61) より、時間 $\tau=3$ におけるアラン分散の値 $\sigma(3)$ となる。ただし、これは数値上のことであり、アラン分散 $\sigma(\tau)$ の単位と係数 K の単位は異なることに注意が必要である。

$$\sigma(3) = K\sqrt{\frac{3}{3}} = K$$

離散過程のランダムウォークは、

$$\left. \begin{aligned}x_{k+1} &= x_k + w_k, & w_k &\sim N(0, \sigma^2) \\ \sigma^2 &= (K\sqrt{\Delta t})^2\end{aligned} \right\} \quad (6.62)$$

と表される.

Excel を使って生成した離散過程のランダムウォークの 4 例を図 6.15 に示す. パワースペクトル密度の大きさの係数 $K=0.1$, 時間間隔 $\Delta t=0.1$ とした. 波形を見やすくするため, 一定のバイアスを付加している. 時間の経過とともに発散していく様子がわかる.

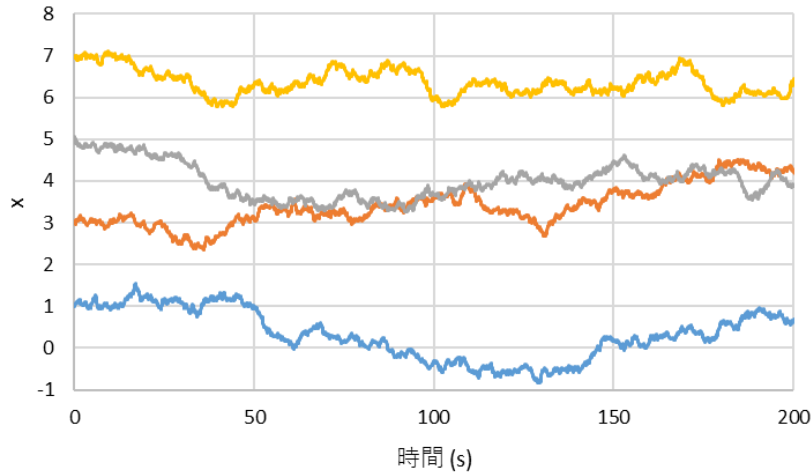


図 6.15 ランダムウォークの時系列データ

生成したランダムウォークに対して, 式 (6.49) を使ってアラン分散を計算して両対数グラフにプロットした結果を図 6.16 に示す. 確かに, 傾きが $+1/2$ の直線となり, 時間 $\tau=3$ における値は $K=0.1$ となっている.

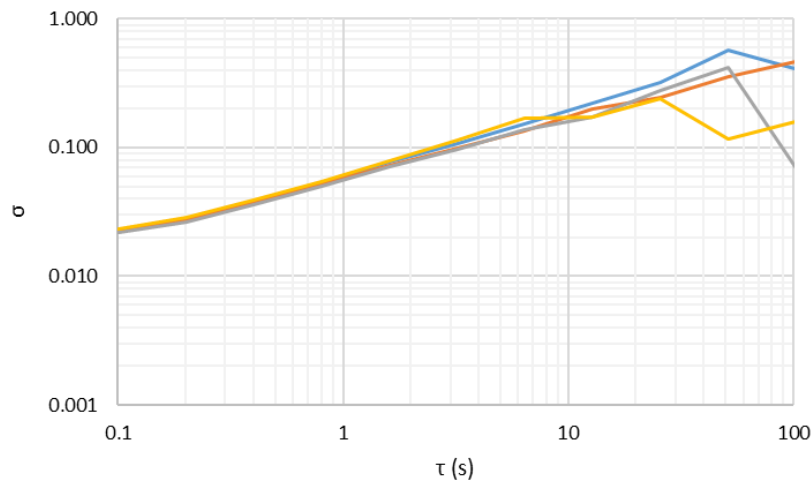


図 6.16 ランダムウォークのアラン分散

6.6.4 マルコフノイズ

マルコフノイズのパワースペクトル密度 S は、式 (6.43) の記号 σ_w を q_c と書き改めて、

$$S(\omega) = \frac{q_c^2}{\omega^2 + \beta^2} \quad (6.63)$$

と表される。係数 q_c の単位はランダムウォークの係数 K と同様である。係数 β の単位は時間の逆数であるから、係数 β の逆数を時定数 τ_c とすると、

$$\beta = \frac{1}{\tau_c} \quad (6.64)$$

と表される。振動数 f および式 (6.51) の変数 u に変数変換すると、

$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{q_c^2}{(2\pi f)^2 + \left(\frac{1}{\tau_c}\right)^2} = \frac{(q_c \tau_c)^2}{1 + (2\pi f \tau_c)^2} \\ S(u) &= \frac{(q_c \tau_c)^2}{1 + \left(2\pi \frac{u}{\pi \tau} \tau_c\right)^2} = \frac{(q_c \tau_c)^2}{1 + 4u^2 \left(\frac{\tau_c}{\tau}\right)^2} = \frac{(q_c \tau_c)^2 \left(\frac{\tau}{\tau_c}\right)^2}{\left(\frac{\tau}{\tau_c}\right)^2 + 4u^2} \\ &= \frac{(q_c \tau)^2}{\left(\frac{\tau}{\tau_c}\right)^2 + 4u^2} \end{aligned} \quad (6.65)$$

となる。パワースペクトル密度 $S(u)$ を変換式 (6.52) に代入して計算すると、マルコフノイズのアラン分散は、

$$\sigma^2(\tau) = \frac{(q_c \tau_c)^2}{\tau} \left(1 - \frac{\tau_c}{2\tau} \left(3 - 4e^{-\frac{\tau}{\tau_c}} + e^{-\frac{2\tau}{\tau_c}} \right) \right)$$

$$\therefore \sigma(\tau) = \frac{q_c \tau_c}{\sqrt{\tau}} \sqrt{1 - \frac{\tau_c}{2\tau} \left(3 - 4e^{-\frac{\tau}{\tau_c}} + e^{-\frac{2\tau}{\tau_c}} \right)} \quad (6.66)$$

となる。このアラン分散 $\sigma(\tau)$ を両対数グラフにプロットすると、図 6.17 に示すように、山形の曲線となる。山形の左側は傾きが $+1/2$ 、右側は傾きが $-1/2$ となる。この式の導出は付録とする。

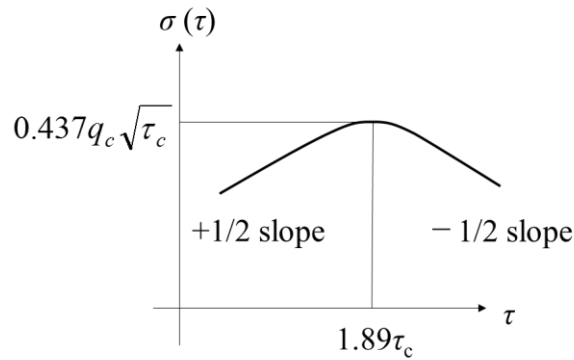


図 6.17 マルコフノイズのアラン分散の模式図

山形の極大値の座標（縦軸と横軸の値）を求めると、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} &= 0.437q_c\sqrt{\tau_c} \\ \tau &= 1.89\tau_c \end{aligned} \right\} \quad (6.67)$$

となる。

式 (6.66) において、時間 τ に対して時定数 τ_c が非常に大きい場合を考えると、指数関数を級数展開して、

$$\begin{aligned}
 \sigma^2(\tau) &= \frac{(q_c \tau_c)^2}{\tau} \left(1 - \frac{\tau_c}{2\tau} \left(3 - 4e^{-\frac{\tau}{\tau_c}} + e^{-\frac{2\tau}{\tau_c}} \right) \right) \\
 &= \frac{(q_c \tau_c)^2}{\tau} \left(1 - \frac{\tau_c}{2\tau} \left(3 - 4 \left(1 - \frac{\tau}{\tau_c} + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{\tau_c} \right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\tau}{\tau_c} \right)^3 + \dots \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(1 - \frac{2\tau}{\tau_c} + \frac{1}{2} \left(\frac{2\tau}{\tau_c} \right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{2\tau}{\tau_c} \right)^3 + \dots \right) \right) \right) \\
 &= \frac{(q_c \tau_c)^2}{\tau} \left(1 - \frac{\tau_c}{2\tau} \left(3 - 4 + \frac{4\tau}{\tau_c} - 2 \left(\frac{\tau}{\tau_c} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\tau}{\tau_c} \right)^3 + \dots \right) \right. \\
 &\quad \left. + 1 - \frac{2\tau}{\tau_c} + 2 \left(\frac{\tau}{\tau_c} \right)^2 - \frac{4}{3} \left(\frac{\tau}{\tau_c} \right)^3 + \dots \right) \\
 &= \frac{(q_c \tau_c)^2}{\tau} \left(1 - \frac{\tau_c}{2\tau} \left(0 + \frac{2\tau}{\tau_c} + 0 - \frac{2}{3} \left(\frac{\tau}{\tau_c} \right)^3 + \dots \right) \right) \\
 &= \frac{(q_c \tau_c)^2}{\tau} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\tau}{\tau_c} \right)^2 + \dots \right) \right) = \frac{(q_c \tau_c)^2}{\tau} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{\tau}{\tau_c} \right)^2 + \dots \right) \\
 &\cong \frac{q_c^2 \tau}{3}
 \end{aligned}$$

となる。係数の q_c を K に置き換えれば、ランダムウォークのアラン分散の式 (6.61) に一致する。逆に、時間 τ に対して時定数 τ_c が非常に小さい場合を考えると、

$$\begin{aligned}
 \sigma^2(\tau) &= \frac{(q_c \tau_c)^2}{\tau} \left(1 - \frac{\tau_c}{2\tau} \left(3 - 4e^{-\frac{\tau}{\tau_c}} + e^{-\frac{2\tau}{\tau_c}} \right) \right) \\
 &\cong \frac{(q_c \tau_c)^2}{\tau} (1 - 0 \times (3 - 0 + 0)) \\
 &= \frac{(q_c \tau_c)^2}{\tau}
 \end{aligned}$$

となる。係数の $q_c \tau_c$ を N に置き換えれば、ホワイトノイズのアラン分散の式 (6.54) に一致する。

離散過程のマルコフノイズの方程式は、

$$\left. \begin{aligned} x_{k+1} &= e^{-\beta \Delta t} x_k + w_k, \quad w_k \sim N(0, \sigma^2) \\ \sigma^2 &= (q_c \sqrt{\Delta t})^2 \end{aligned} \right\} \quad (6.68)$$

と表される。

Excel を使って生成した離散過程のマルコフノイズの 4 例を図 6.18 に示す。パワースペクトル密度の大きさの係数 $q_c = 0.1$ ，係数 $\beta = 0.5$ ，時間間隔 $\Delta t = 0.1$ とした。波形を見やすくするため，一定のバイアスを付加している。ランダムウォークのように時間経過とともに発散することはない。

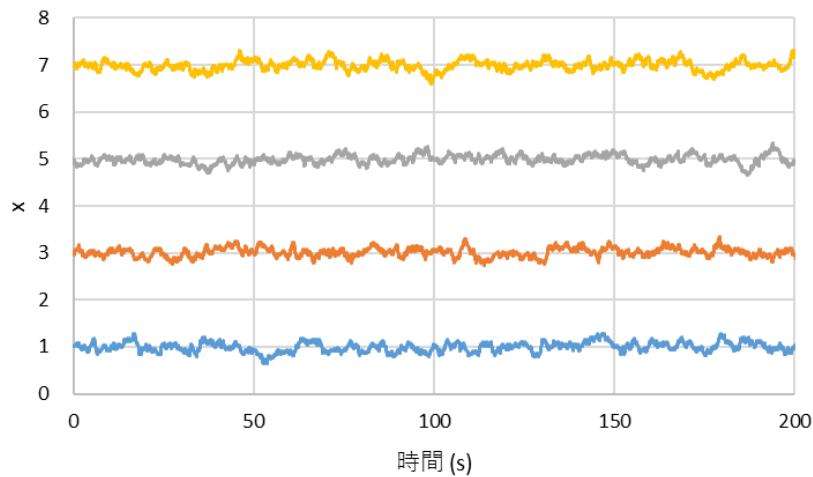


図 6.18 マルコフノイズの時系列データ

生成したマルコフノイズに対して，式 (6.49) を使ってアラン分散を計算して両対数グラフにプロットした結果を図 6.19 に示す。極大値の左側は傾きが $+1/2$ ，極大値の右側は傾き $-1/2$ となっている。極大値の縦軸と横軸の値を式 (6.67) を使って計算すると，

$$\left. \begin{aligned} 0.437 q_c \sqrt{\tau_c} &= 0.437 \times 0.1 \times \sqrt{2} = 0.0062 \\ 1.89 \tau_c &= 1.89 \times 2 = 3.78 \end{aligned} \right\}$$

となり，確かに，図の極大値はこの近傍の値となっている。

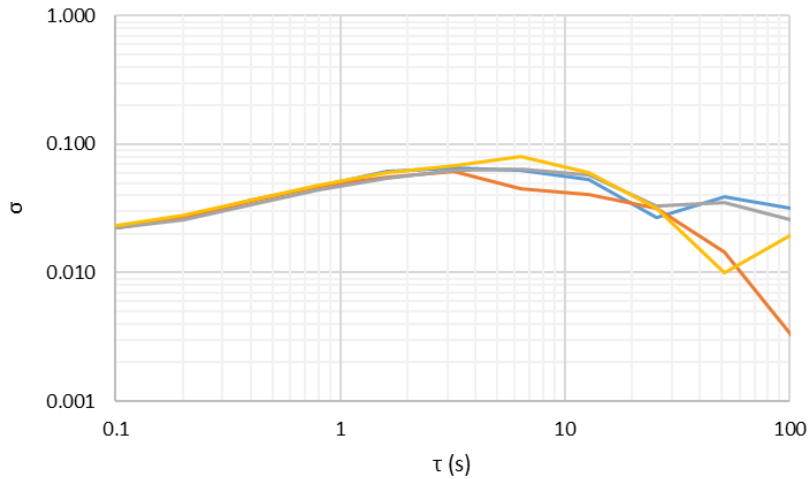


図 6.19 マルコフノイズのアラン分散

6.7 センサノイズ

慣性センサの代表的なノイズは式 (6.54) のホワイトノイズ, 式 (6.58) の $1/f$ ノイズ, 式 (6.61) のランダムウォークである. センサの出力の単位を $[x]$ とすると, ホワイトノイズの係数 N の単位は $[x]\sqrt{s} = [x]\sqrt{\text{Hz}}$, $1/f$ ノイズの係数 B の単位は $[x]$, ランダムウォークの係数 K の単位は $[x]/\sqrt{s}$ である. 慣性センサにおけるノイズ係数 N, B, K の単位の例を表 6.5 に示す.

表 6.5 アラン分散の係数の単位

| | 係数 | 角速度センサ | 加速度センサ |
|-----------|-----|---|---|
| ホワイトノイズ | N | $\frac{\text{rad}}{\sqrt{s}}, \frac{\text{deg}}{\sqrt{s}}, \frac{\text{deg}}{s\sqrt{\text{Hz}}}, \frac{\text{deg}}{h\sqrt{\text{Hz}}}, \frac{\text{deg}}{\sqrt{h}}$ | $\frac{\text{m}}{s^{1.5}}, \frac{\text{g}}{\sqrt{\text{Hz}}}, \frac{\text{mg}}{\sqrt{\text{Hz}}}$ |
| $1/f$ ノイズ | B | $\frac{\text{rad}}{s}, \frac{\text{deg}}{s}, \frac{\text{deg}}{h}$ | $\frac{\text{m}}{s^2}, \text{g}, \text{mg}$ |
| ランダムウォーク | K | $\frac{\text{rad}}{s^{1.5}}, \frac{\text{deg}}{s^{1.5}}, \frac{\text{deg}}{h^{1.5}}$ | $\frac{\text{m}}{s^{2.5}}, \frac{\text{g}}{\sqrt{s}}, \frac{\text{mg}}{\sqrt{s}}$ |

慣性計測装置のカルマンフィルタに利用される最も簡単なセンサノイズモデルはホワイトノイズである. 角速度センサと加速度センサの離散過程のホワイトノイズは,

$$x_k = w_k, \quad w_k \sim N\left(0, \left(\frac{N}{\sqrt{\Delta t}}\right)^2\right)$$

と表される。一定のバイアスが存在する場合であっても、慣性計測装置の起動時にバイアスを 0 に調整できる場合には、このホワイトノイズモデルを使うことができる。

1/fノイズは慣性計測装置のカルマンフィルタのセンサモデルとして使うことは困難である。そこで、バイアスが存在して時間的に変化する場合のセンサノイズモデルとして、ホワイトノイズとランダムウォークの組み合わせがよく使われる。この組み合わせの離散過程のセンサノイズは、式 (6.55) と式 (6.62) より、

$$\left. \begin{aligned} x_k &= b_k + v_k, \quad v_k \sim N\left(0, \left(\frac{N}{\sqrt{\Delta t}}\right)^2\right) \\ b_k &= b_{k-1} + w_{k-1}, \quad w_k \sim N\left(0, (K\sqrt{\Delta t})^2\right) \end{aligned} \right\}$$

と表される。この式のアラン分散を両対数グラフにプロットすると、図 6.20 の実線に示す谷形の曲線となる。谷の左側では傾きが $-1/2$ の直線に、谷の右側では傾きが $+1/2$ の直線になる。このセンサモデルのアラン分散は、

$$\sigma^2(\tau) = \frac{N^2}{\tau} + \frac{K^2\tau}{3} \tag{6.69}$$

となる。この式が極小値をとる横軸の時間 τ の値を求めると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\sigma^2(\tau) &= -\frac{N^2}{\tau^2} + \frac{K^2}{3} = 0, \quad \therefore \tau^2 = \frac{3N^2}{K^2} \\ \therefore \tau &= \frac{\sqrt{3}N}{K} \end{aligned} \tag{6.70}$$

となる。この時間 τ を式 (6.69) に代入すると、極小値は、

$$\begin{aligned}\sigma^2(\tau) &= N^2 \frac{K}{\sqrt{3}N} + \frac{K^2}{3} \frac{\sqrt{3}N}{K} = \frac{NK}{\sqrt{3}} + \frac{NK}{\sqrt{3}} = \frac{2NK}{\sqrt{3}} \\ \therefore \sigma(\tau) &= \sqrt{\frac{2NK}{\sqrt{3}}}\end{aligned}\tag{6.71}$$

となる.

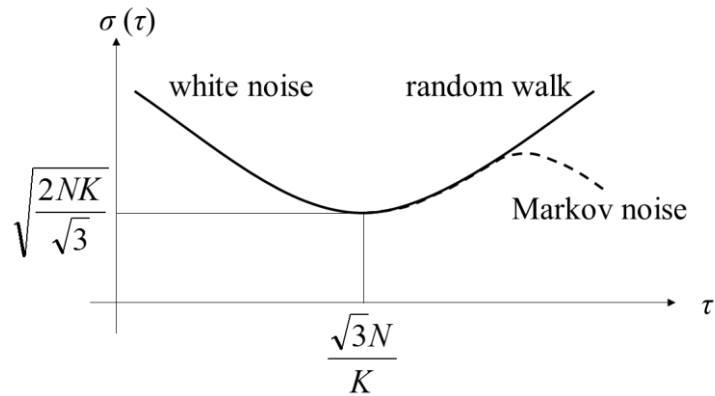


図 6.20 センサノイズモデル

ホワイトノイズとマルコフノイズの組み合わせが、慣性計測装置のセンサモデルとして使われることもある。この場合のアラン分散の両対数グラフは図 6.20 の破線に示すように、左側は傾きが $-1/2$ の直線となり、右側は山形の曲線となる。

慣性計測装置に使用するセンサのアラン分散をできるだけ再現できるようなセンサノイズモデルを選択し、そのパラメータ (N, K など) を決定してカルマンフィルタに利用する。

問題

問題 6.1 マルコフノイズのパワースペクトル密度の式 (6.43) を導け.

問題 6.2 マルコフノイズのパワースペクトル密度の特殊な場合としてホワイトノイズのパワースペクトル密度を導け.

参考文献

- 1) JIS C 5630-20, マイクロマシン及び MEMS – 第 20 部：小型ジャイロ, 日本規格協会, 2015
- 2) IEEE Std 952-1997, IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic Gyros
- 3) N. J. Kasdin, Discrete Simulation of Colored Noise and Stochastic Processes and $1/f^\alpha$ Power Law Noise Generation, Proc. IEEE, Vol. 83, No. 5, 1995
- 4) M. M. Tehrani, Ring Laser Gyro Data Analysis with Cluster Sampling Technique, Proc. SPIE0412, Fiber Optic and Laser Sensors 1, 1983