

### 3 座標系と座標変換

慣性計測技術においては、いくつかの直交座標系 (frame) を使い分ける。直交座標系はデカルト座標系、カーテシアン座標系とも言う。本書で使用する代表的な 4 種類の直交座標系を表 3.1 に示す。

表 3.1 座標系の種類

日本語名称	英語名称	添え字	特徴
地球中心慣性座標系 (ECI 座標系)	earth centered inertial frame (ECI frame)	$i$	慣性座標系
地球中心地球固定座標系 (ECEF 座標系)	earth centered earth fixed frame (ECEF frame)	$e$	回転座標系
航法座標系	navigation frame	$n$	回転座標系
機体座標系	body frame	$b$	回転座標系

本章では、これらの座標系についてくわしく説明するとともに、それぞれの座標系間の座標変換を表す方法について説明する。座標系間の座標変換を表す方法には、方向余弦行列 (direction cosine matrix, DCM) と呼ばれる 3 行 3 列の直交行列が使われる。特に航法座標系と機体座標系との間の座標変換を表す方法には、オイラー角 (Euler angle) と呼ばれる 3 個の角度の組み合わせが使われる。これらの方法についてもくわしく説明する。

#### Column

表 3.1 の 2 番目の地球中心地球固定座標系と 3 番目の航法座標系との間にワンダーアジマス座標系 (wander azimuth frame) と呼ばれる座標系が使われることもある。このワンダーアジマス座標系は高緯度 (北極や南極に近い緯度) における航法で必要となるが、本書では扱わない。

### 3.1 ECI 座標系と ECEF 座標系

地球中心慣性座標系 (earth centered inertial frame) を図 3.1 の座標系  $Ox_i y_i z_i$  に示し, 地球中心地球固定座標系 (earth centered earth fixed frame) を同図の座標系  $Ox_e y_e z_e$  に示す.

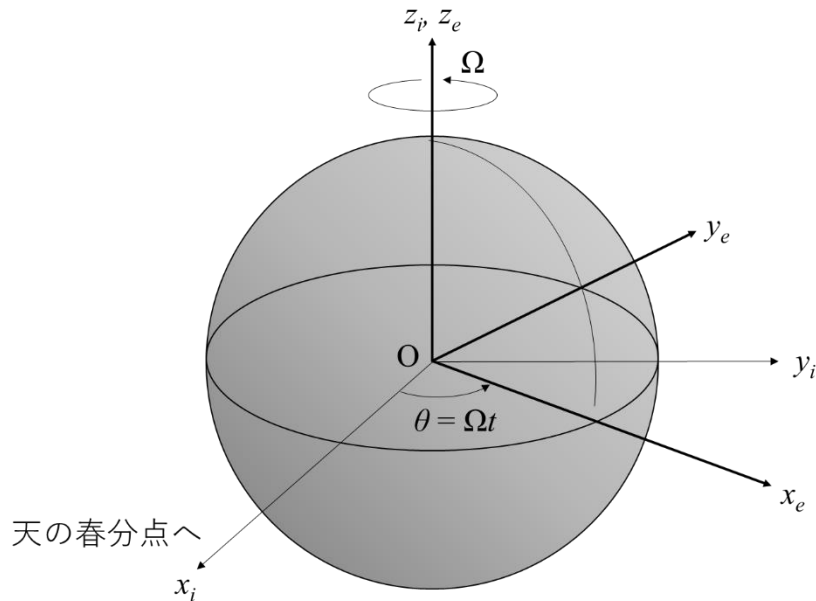


図 3.1 ECI 座標系と ECEF 座標系

地球中心慣性座標系の添え字の  $i$  は慣性を意味する inertia の頭文字である。以下, この座標系を ECI 座標系と記す。地球の中心に座標系の原点  $O$  をとる。第 1 に, 原点  $O$  から宇宙空間に固定された一定の方向に向けて  $x$  軸をとる。その方向は, 天の春分点 (vernal equinox) の方向, すなわち春分の日に地球から太陽を望む方向と定義されている。第 2 に, 地球の自転軸方向に  $z$  軸をとる。すなわち, 原点  $O$  から北極に向かう方向であり, 北極星付近を望む方向である。第 3 に,  $x$  軸と  $z$  軸とに直交して右ねじ系を構成するように  $y$  軸をとる。このように定義された  $y$  軸と  $z$  軸の方向も宇宙空間に固定されている。この  $x$  軸と  $y$  軸とを含む平面を地球の赤道面と言う。地球は太陽のまわりを公転しているから, 厳密には慣性座標系とは言えないが, 地球表面やその近傍 (低高度や低深度) を運動する移動体を扱う場合, 慣性座標系とみなすことができる。

地球中心地球固定座標系の添え字  $e$  は地球を意味する earth の頭文字である。以下, この座標系を ECEF 座標系と記す。地球の中心に座標系の原点  $O$  をとる。第 1 に, 経度  $0$  度の子午面 (英国のグリニッジ付近を通る子午面) と赤道面とが交わる交線の方向に  $x$  軸をとる。すなわち, 原点  $O$  から緯度  $0$  度, 経度  $0$  度の地点に向かう方向である。第 2 に, 地球の自転軸方向に  $z$  軸をとる。第 3 に,  $x$  軸と  $z$  軸とに直交して右ねじ系を構成するように  $y$

軸をとる。すなわち、原点  $O$  から緯度  $0$  度、東経  $90$  度の地点に向かう方向である。  $z$  軸の方向は時間的に変化しないが、  $x$  軸と  $y$  軸は地球に固定されているため、  $z$  軸まわりに地球の自転角速度  $\Omega$  で回転している。

### 3.2 航法座標系

航法座標系 (navigation frame) を図 3.2 の座標系  $Ox_n y_n z_n$  に示す。添え字  $n$  は航法を意味する navigation の頭文字である。

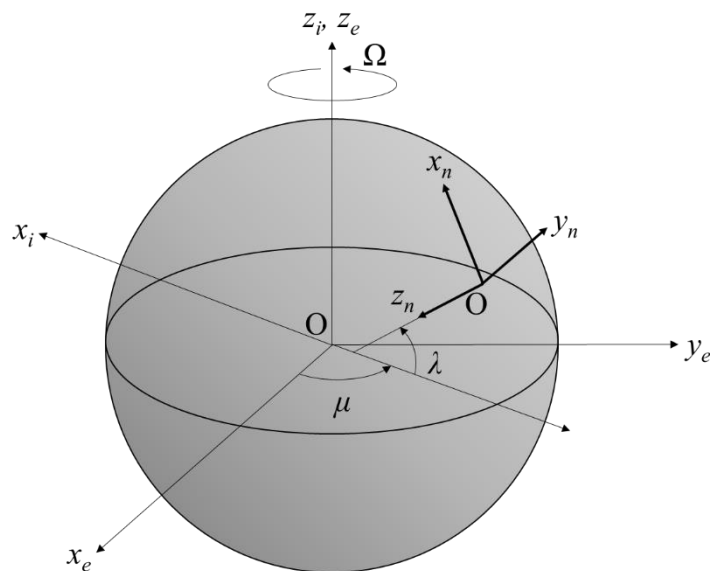


図 3.2 航法座標系

移動体の基準とする点を座標系の原点  $O$  とする。原点  $O$  を通り鉛直方向に下向き（重力の方向）に  $z_n$  軸（down 軸）をとる。原点  $O$  を通り、  $z$  軸に直交する平面、すなわち局地的な水平面を考える。その水平面上に、北方向に  $x_n$  軸（north 軸）をとり、東方向に  $y_n$  軸（east 軸）をとると、右ねじ系の直交座標系が構成される。この航法座標系は移動体が運動するとともに原点  $O$  が移動する。移動体が地上で静止している場合においても、地球の自転軸まわりに回転している。

#### Column

図 3.2 の north – east – down (NED) 座標系の他に、 north – west – up (NWU) 座標系や east – north – up (ENU) 座標系などが使われることもある。これらの直交座標系も右ねじ系である。

### 3.3 機体座標系

機体座標系 (body frame) を図 3.3 の座標系  $Ox_b y_b z_b$  に示す. 添え字  $b$  は機体を意味する body の頭文字である. この機体座標系も, 移動体の回転運動とともに回転する回転座標系である.

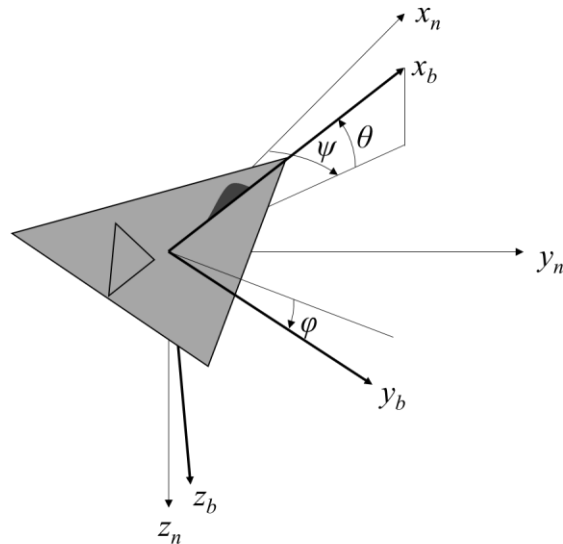


図 3.3 機体座標系とオイラー角

航法座標系と機体座標系との関係は, オイラー角と呼ばれる 3 個の角度を使って表される. オイラー角の定義はいくつかあり, 理論上は次の 12 通りがある.

$$\begin{array}{cccccc} x-y'-z'' & x-z'-y'' & y-z'-x'' & y-x'-z'' & z-x'-y'' & z-y'-x'' \\ x-y'-x'' & x-z'-x'' & y-z'-y'' & y-x'-y'' & z-x'-z'' & z-y'-z'' \end{array}$$

例えば, 最初の  $x-y'-z''$  では, 第 1 に  $x$  軸回りにある角度を回転し, 第 2 に新たな  $y$  軸 ( $y'$  軸と記す) 回りにある角度を回転し, 第 3 に新たな  $z$  軸 ( $z''$  軸と記す) 回りにある角度を回転することを意味する. 上側の 6 個は回転軸がすべて異なる方式であり, 下側の 6 個は回転軸が 2 回重複する方式である. 数学の分野では  $z-x'-z''$  が一般的なようである.

本書では, 航空機の分野などで最も一般的な  $z-y'-x''$  の方式について記す. 図 3.3 に示すように, 航法座標系の  $x_n$  軸 (north 軸) と  $y_n$  軸 (east 軸) を含む平面が水平面である. 機体の  $x$  軸をこの水平面上に投影した直線と航法座標系の  $x_n$  軸 (north 軸) とがなす角度を方位角  $\psi$  とする. 機体の  $x_b$  軸が水平面となす角度をピッチ角  $\theta$  とする. 機体の  $x_b$  軸まわりの回転角をロール角  $\phi$  とする. これらのロール角, ピッチ角, 方位角の 3 個の角度の

組み合わせをオイラー角と言う。

具体例を以下に記す。方位角  $\psi$ 、ピッチ角  $\theta$ 、ロール角  $\phi$  の3個の角度がすべて  $0^\circ$  の状態、すなわち図 3.4 に示すように機体の  $x_b$  軸、 $y_b$  軸、 $z_b$  軸が、航法座標系の  $x_n$  軸 (north 軸)、 $y_n$  軸 (east 軸)、 $z_n$  軸 (down 軸) にそれぞれ一致している状態を初期姿勢とする。

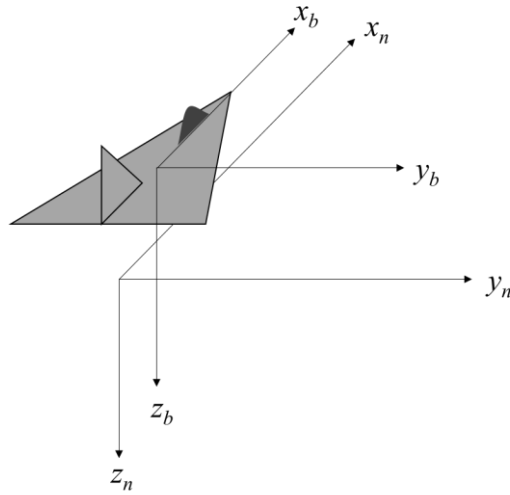


図 3.4 初期姿勢

第 1 に、機体の  $z_b$  軸まわりに、機体を方位角  $\psi$  だけ回転する。右ねじの回転方向を正とする。図 3.5 は方位角  $\psi = 90^\circ$  (東向き) の場合である。新たな機体座標系に記号 ' を付けた。  $x_b'$  軸と  $y_b'$  軸はまだ水平面内にあり、  $z_b'$  軸は元の  $z_b$  軸に一致している。

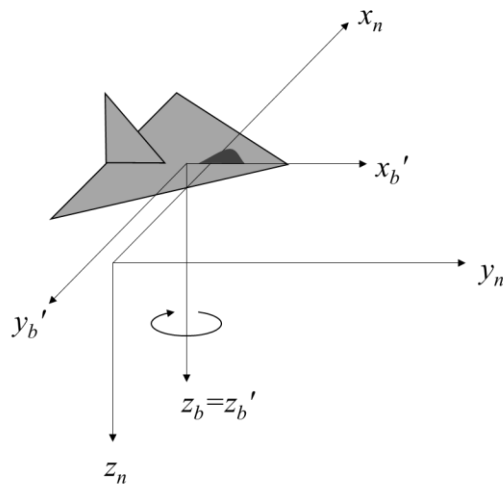


図 3.5 方位角の回転

第2に、新たな $y_b'$ 軸まわりに機体をピッチ角 $\theta$ だけ回転する。右ねじの回転方向、すなわち機首を上げる方向が正方向である。図3.6はピッチ角 $\theta=30^\circ$ の場合を示す。新たな機体座標系に記号 $''$ を付けた。新たな $y_b''$ 軸はまだ水平面内にある。

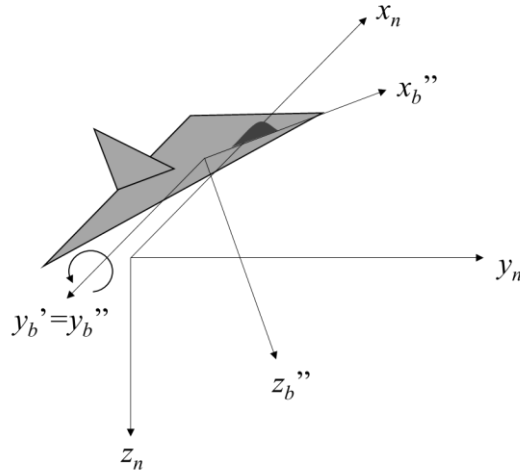


図 3.6 ピッチ角の回転

第3に、新たな $x_b''$ 軸まわりにロール角 $\phi$ だけ回転する。右ねじの回転方向、すなわち右翼を下げる方向が正方向である。図3.7はロール角 $\phi=90^\circ$ の場合を示す。新たな機体座標系に記号 $'''$ を付けた。これが最終姿勢である。

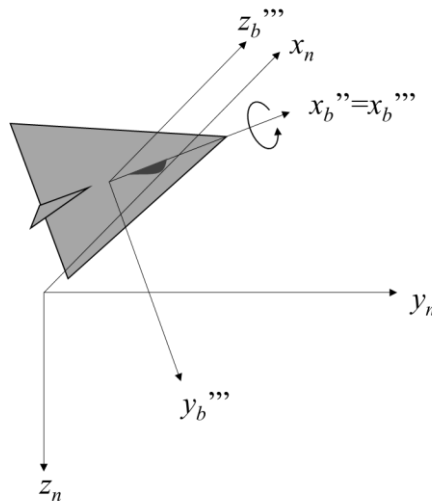


図 3.7 ロール角の回転

以上のように、第1に $z_b$ 軸回りに方位角 $\psi$ だけ機体座標系を回転し、第2に新たな $y_b'$ 軸回りにピッチ角 $\theta$ だけ機体座標系を回転し、第3に新たな $x_b''$ 軸回りにロール角 $\phi$ だけ

機体座標系を回転する。

この方式とは別に、航法座標系を基準として、第1に $x_n$ 軸（north軸）回りにロール角 $\varphi$ だけ機体を回転し、第2に $y_n$ 軸（east軸）回りにピッチ角 $\theta$ だけ機体を回転し、第3に $z_n$ 軸（down軸）回りに方位角 $\psi$ だけ機体を回転しても同じ最終姿勢となる。本節の例の場合、第1に $x_n$ 軸回りにロール角 $\varphi=90^\circ$ だけ機体を回転すると図3.8となる。第2に $y_n$ 軸回りにピッチ角 $\theta=30^\circ$ だけ機体を回転すると図3.9となる。第3に $z_n$ 軸回りに方位角 $\psi=90^\circ$ だけ機体を回転すると図3.10となる。この図3.10の姿勢は図3.7の姿勢と同じである。

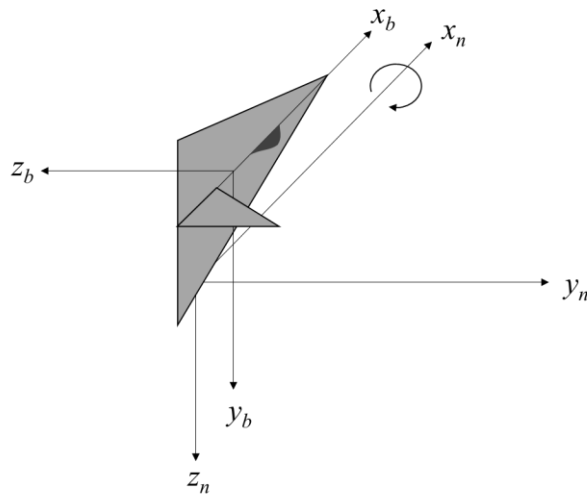


図 3.8  $x_n$ 軸回りのロール角の回転

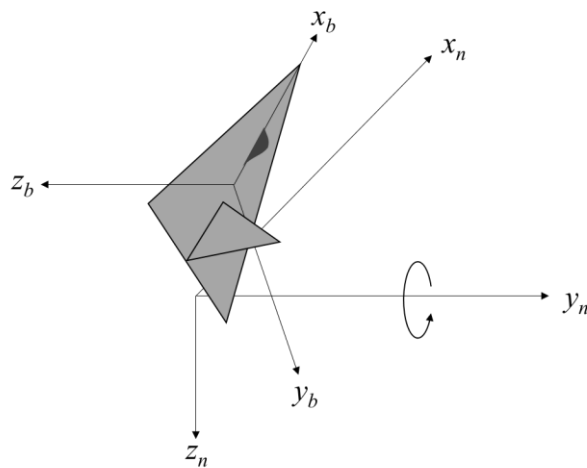


図 3.9  $y_n$ 軸回りのピッチ角の回転

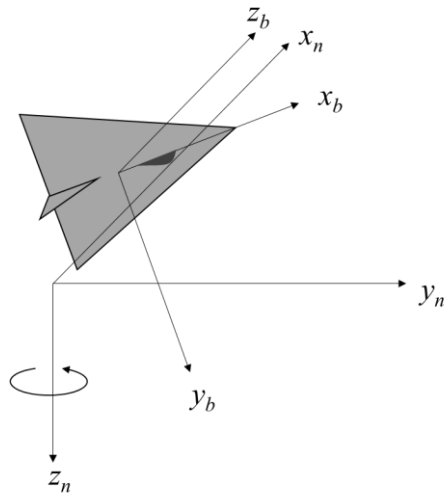


図 3.10  $z_n$  軸回りの方位角の回転

オイラー角と基準座標系をまとめると表 3.2 のようになる。

表 3.2 オイラー角と基準座標系

基準座標系	オイラー角の回転順序 (回転軸)
機体座標系 (動座標系)	$\psi(z) \rightarrow \theta(y') \rightarrow \varphi(x'')$
航法座標系 (固定座標系)	$\varphi(x) \rightarrow \theta(y) \rightarrow \psi(z)$

*Column*

オイラー角と似た用語に姿勢角 (attitude angle) がある。姿勢角の定義は一意的ではない。広義の姿勢角はオイラー角と同義であり、ロール角、ピッチ角、方位角の 3 個の角度を指す。狭義の姿勢角はロール角とピッチ角の 2 個の角度を指す。



3.4 座標系間の座標変換

3.4.1 航法座標系と機体座標系との座標変換

第1の方位角の回転前後の座標系を上方から見たところを図3.11に示す。回転前の座標軸を  $x, y$ 、回転後の座標軸を  $X, Y$  とする。回転軸となる  $z$  軸は紙面に垂直で、紙面の表側から裏側に向かう。右ねじの回転方向を正の回転方向とするから、時計まわりの回転、すなわち機首が北向きから東向きへ回転する方向が正の回転方向である。

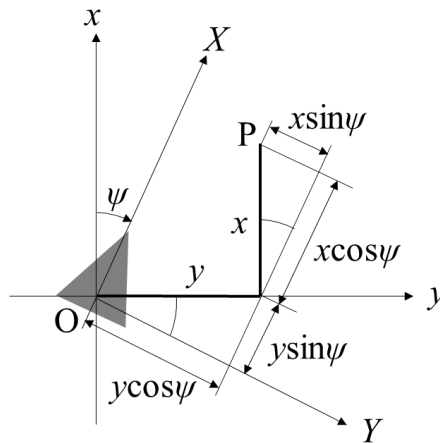


図 3.11 方位角の回転と座標系

同じ点 P に対する回転前の座標  $(x, y, z)$  と回転後の座標  $(X, Y, Z)$  との関係は、

$$\left. \begin{aligned} X &= x \cos \psi + y \sin \psi \\ Y &= -x \sin \psi + y \cos \psi \\ Z &= z \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

となる。回転軸となる  $z$  軸の座標は変化しない。行列を使って表わすと、

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

となる。右辺左側の行列は方位角  $\psi$  の回転を表す座標変換行列であり、 $\mathbf{C}_0^1$  とする。

第2のピッチ角の回転前後の座標系を機体の右側から見たところを図3.12に示す。回転前の座標軸を  $x, z$ 、回転後の座標軸を  $X, Z$  とする。回転軸となる  $y$  軸は紙面に垂直で、紙面の裏側から表側に向かう。右ねじの回転方向を正の回転方向とするから、時計まわりの回転、すなわち機首を上げる回転方向が正の回転方向である。

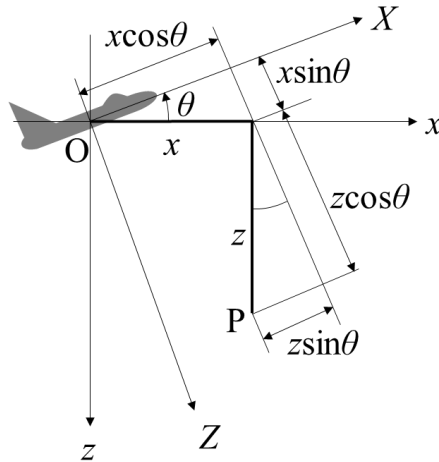


図 3.12 ピッチ角の回転と座標系

同じ点 P に対する回転前の座標  $(x, y, z)$  と回転後の座標  $(X, Y, Z)$  との関係は、

$$\left. \begin{aligned} X &= x \cos \theta - z \sin \theta \\ Y &= y \\ Z &= x \sin \theta + z \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

となる。回転軸となる  $y$  軸の座標は変化しない。行列を使って表わすと、

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

となる。右辺左側の行列はピッチ角  $\theta$  の回転を表す座標変換行列であり、 $C_1^2$  とする。

第3のロール角の回転前後の座標系を機体の後方から見た図を図3.13に示す。回転前の座標軸を  $y, z$ 、回転後の座標軸を  $Y, Z$  とする。回転軸となる  $x$  軸は紙面に垂直で、紙面の表側から裏側に向かう。右ねじの回転方向を正の回転方向とするから、時計まわりの回転、すなわち右翼を下げる回転方向が正の回転方向である。

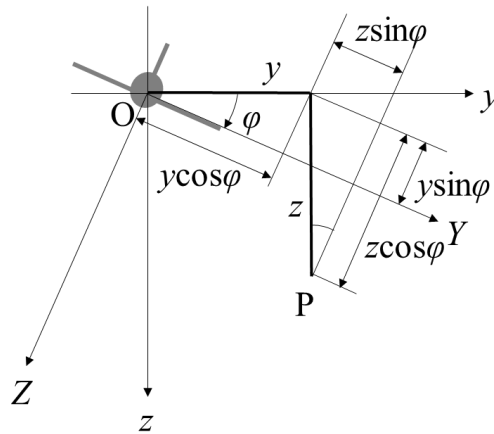


図 3.13 ロール角の回転と座標系

同じ点 P に対する回転前の座標  $(x, y, z)$  と回転後の座標  $(X, Y, Z)$  との関係は、

$$\left. \begin{aligned} X &= x \\ Y &= y \cos \varphi + z \sin \varphi \\ Z &= -y \sin \varphi + z \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

となる。回転軸となる  $x$  軸の座標は変化しない。行列を使って表わすと、

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

となる。右辺左側の行列がロール角  $\varphi$  の回転を表す座標変換行列であり、 $\mathbf{C}_2^3$  とする。

以上の3回の回転の座標変換行列を順に左側へ並べた積が、航法座標系から機体座標系への座標変換行列となる。このような座標変換行列を一般に方向余弦行列と言う。(問題3.1参照)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}^b &= \mathbf{C}_n^b \mathbf{x}^n \\
 \mathbf{C}_n^b &= \mathbf{C}_2^3 \mathbf{C}_1^2 \mathbf{C}_0^1 \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ -\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\sin\theta\cos\psi & \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\theta\sin\psi & \sin\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\psi + \cos\phi\sin\theta\cos\psi & -\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

逆に機体座標系から航法座標系への方向余弦行列は、この行列の転置行列となる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}^n &= \mathbf{C}_b^n \mathbf{x}^b \\
 \mathbf{C}_b^n &= \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & -\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\sin\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\psi + \cos\phi\sin\theta\cos\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\theta\sin\psi & -\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\theta\sin\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

## 3.4.2 ECI 座標系と ECEF 座標系との座標変換

ECI 座標系と ECEF 座標系は、図 3.1 に示すように、原点  $O$  と  $z$  軸を共通とする。二つの座標系の  $x$  軸同士がなす角度を  $\theta$  とすると、 $y$  軸同士がなす角度も同じ角度  $\theta$  である。

(本節での角度  $\theta$  はピッチ角の  $\theta$  ではない。) 二つの座標系が一致した瞬間の時刻  $t$  を 0 時とすると、地球の自転角速度  $\Omega$  を用いて、 $\theta = \Omega t$  と表される。同じ点  $P$  に対する回転前の座標  $(x, y, z)$  と回転後の座標  $(X, Y, Z)$  との関係は、

$$\left. \begin{aligned} X &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ Y &= -x \sin \theta + y \cos \theta \\ Z &= z \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

となる。回転軸となる  $z$  軸の座標は変化しない。行列を使って表わすと、

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

となる。したがって、ECI 座標系から ECEF 座標系への方向余弦行列  $\mathbf{C}_i^e$  は、

$$\mathbf{C}_i^e = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

となる。逆に ECEF 座標系から ECI 座標系への方向余弦行列は、この行列の転置行列となる。

$$\mathbf{C}_e^i = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

### 3.4.3 ECEF 座標系と航法座標系の座標変換

ECEF 座標系から航法座標系への座標変換は、図 3.14 に示す 3 回の回転に分解して考えることができる。

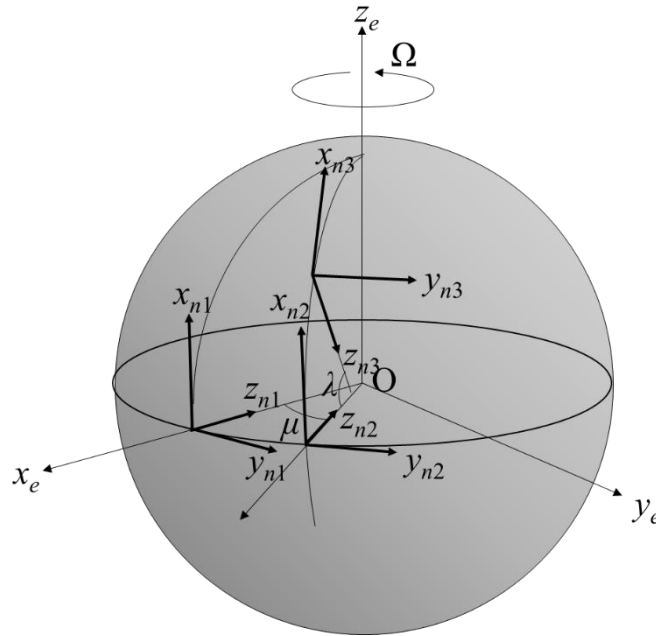


図 3.14 ECEF 座標系と航法座標系

第 1 に、ECEF 座標系から、緯度  $0^\circ$ 、経度  $0^\circ$  の地点における航法座標系  $n1$  へ変換する。第 2 に、 $x_{n1}$  軸まわりに角度  $\mu$  (経度) だけ回転して、緯度  $0^\circ$ 、経度  $\mu$  における航法座標系  $n2$  へ変換する。第 3 に、 $y_{n2}$  軸まわりに負方向に角度  $\lambda$  (緯度) だけ回転し、目的とする位置 (緯度  $\lambda$ 、経度  $\mu$ ) における航法座標系  $n3$  へ変換する。

#### Column

緯度 (latitude) と経度 (longitude) の英語の頭文字がともに  $l$  (エル) であるためか、緯度と経度の記号は文献によって様々である。緯度の記号としては  $\lambda$  の他に  $L, \varphi$  などが、経度の記号としては  $\mu$  の他に  $l, \lambda, \theta$  などが用いられることがある。

第1の回転前の座標  $(x_e, y_e, z_e)$  と回転後の座標  $(x_1, y_1, z_1)$  との関係は,

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = z_e \\ y_1 = y_e \\ z_1 = -x_e \end{array} \right\} \quad (3.13)$$

となる。二つの座標系の  $y$  軸は共通である。行列を使って表わすと,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

となる。この右辺左側の行列を  $\mathbf{C}_0^1$  とする。

第2の回転前の座標  $(x_1, y_1, z_1)$  と回転後の座標  $(x_2, y_2, z_2)$  との関係は,

$$\left. \begin{array}{l} x_2 = x_1 \\ y_2 = y_1 \cos \mu + z_1 \sin \mu \\ z_2 = -y_1 \sin \mu + z_1 \cos \mu \end{array} \right\} \quad (3.15)$$

となる。回転軸となる  $x$  軸の座標は変化しない。行列を使って表わすと,

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \mu & \sin \mu \\ 0 & -\sin \mu & \cos \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

となる。この右辺左側の行列を  $\mathbf{C}_1^2$  とする。

第3の回転前の座標  $(x_2, y_2, z_2)$  と回転後の座標  $(x_3, y_3, z_3)$  との関係は,

$$\left. \begin{array}{l} x_3 = x_2 \cos \lambda + z_2 \sin \lambda \\ y_3 = y_2 \\ z_3 = -x_2 \sin \lambda + z_2 \cos \lambda \end{array} \right\} \quad (3.17)$$

となる。回転軸となる  $y$  軸の座標は変化しない。緯度  $\lambda$  の回転方向は、回転軸である  $y$  軸まわりに反時計方向を正とする。北半球の緯度を正と定義しているためであり、右ねじの

回転方向とは逆方向になっている。行列を使って表わすと、

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\lambda & 0 & \sin\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\lambda & 0 & \cos\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

となる。この右辺左側の行列を  $\mathbf{C}_2^3$  とする。

以上の3回の座標変換行列を順に左側へ並べると、ECEF座標系から航法座標系への方向余弦行列は、

$$\mathbf{C}_e^n = \mathbf{C}_2^3 \mathbf{C}_1^2 \mathbf{C}_0^1 = \begin{bmatrix} -\sin\lambda \cos\mu & -\sin\lambda \sin\mu & \cos\lambda \\ -\sin\mu & \cos\mu & 0 \\ -\cos\lambda \cos\mu & -\cos\lambda \sin\mu & -\sin\lambda \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

となる。(問題3.2参照) 逆に航法座標系からECEF座標系への方向余弦行列はこの行列の転置行列となる。

$$\mathbf{C}_n^e = \begin{bmatrix} -\sin\lambda \cos\mu & -\sin\mu & -\cos\lambda \cos\mu \\ -\sin\lambda \sin\mu & \cos\mu & -\cos\lambda \sin\mu \\ \cos\lambda & 0 & -\sin\lambda \end{bmatrix} \quad (3.20)$$



## 3.4.4 ECI 座標系と航法座標系との座標変換

ECI 座標系から ECEF 座標系への座標変換と，ECEF 座標系から航法座標系への座標変換を連続して行くと，ECI 座標系から航法座標系への方向余弦行列は，

$$\mathbf{C}_i^n = \mathbf{C}_e^n \mathbf{C}_i^e = \begin{bmatrix} -\sin \lambda \cos(\theta + \mu) & -\sin \lambda \cos(\theta + \mu) & \cos \lambda \\ -\sin(\theta + \mu) & \cos(\theta + \mu) & 0 \\ -\cos \lambda \cos(\theta + \mu) & -\cos \lambda \sin(\theta + \mu) & -\sin \lambda \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

となる。(問題 3.3 参照) 逆に航法座標系から ECI 座標系への方向余弦行列はこの行列の転置行列となる。

$$\mathbf{C}_n^i = \begin{bmatrix} -\sin \lambda \cos(\theta + \mu) & -\sin(\theta + \mu) & -\cos \lambda \cos(\theta + \mu) \\ -\sin \lambda \cos(\theta + \mu) & \cos(\theta + \mu) & -\cos \lambda \sin(\theta + \mu) \\ \cos \lambda & 0 & -\sin \lambda \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

## 問題

問題 3.1 方向余弦行列  $\mathbf{C}_n^b$  の式 (3.7) を証明せよ。

問題 3.2 方向余弦行列  $\mathbf{C}_e^n$  の式 (3.19) を証明せよ。

問題 3.3 方向余弦行列  $\mathbf{C}_i^n$  式 (3.21) を証明せよ。

## 参考文献

- 1) D. H. Titterton, Strapdown Inertial Navigation Technology, 2<sup>nd</sup> Edition, AIAA, 2004