惑星の運動

ニュートンの運動方程式と万有引力の法則を使って，惑星が太陽のまわりをどのように運動するかを調べる．惑星の運動を調べるには，直交座標系よりも，図 1 に示す極座標系を使う方が便利である．記号 r は動径， θ は偏角，$\mathbf{i}_r$ は半径方向の単位ベクトル，$\mathbf{i}_\theta$ は周方向の単位ベクトルである．

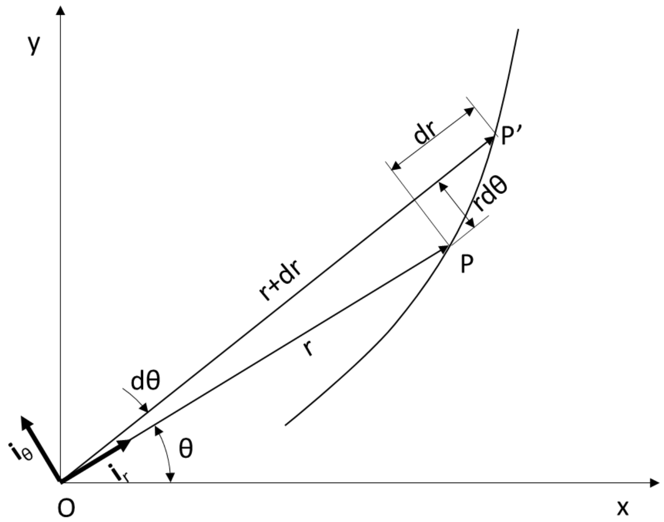

図 1 極座標系

極座標系におけるニュートンの運動方程式は，

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{F} = R\,\mathbf{i}_r + \Theta\,\mathbf{i}_\theta \\
&m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) = R \\
&m\left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right) = \Theta
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

である．ここに，$\mathbf{F}$ は物体に働く力ベクトル，R は半径方向の分力，Θ は周方向の分力，m は物体の質量，t は時間である．

惑星（質量 m ）を物体 P とし，太陽（質量 M ）を極座標系の原点 O とすると，惑星に働く力ベクトル $\mathbf{F}$ は，万有引力定数を G として，

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{F} = -F\,\mathbf{i}_r + 0\,\mathbf{i}_\theta \\
&F = G\frac{Mm}{r^2}
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

である．万有引力定数 G と太陽の質量 M の値は，理科年表より，

$$
\begin{aligned}
&G = 6.67408\times 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg^2} \\
&M = 1.9884\times 10^{30}\ kg
\end{aligned}
$$

である．万有引力定数 G は有効数字 6 桁で示してあるが，確実な有効数字は 6.674 までの 4 桁である．以下，定数 G や M は単独で現れることはなく，積 GM の形で現れる．この定数 GM の単位は $\mathrm{Nm^2/kg}$ であるが，次のように $\mathrm{m^3/s^2}$ でもある．

$$
\left[GM\right] = \frac{Nm^2}{kg} = \frac{kg\dfrac{m}{s^2}m^2}{kg} = \frac{m^3}{s^2}
$$

1.　ケプラーの第 2 法則

運動方程式(1)に万有引力の式(2)を代入すると，

$$
\begin{aligned}
&m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) = -G\frac{Mm}{r^2} \\
&m\left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right) = 0
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

となる．ここで，第 2 式（周方向の式）の両辺に r をかけて時間積分すると，

$$
\begin{aligned}
&m\left(r^2\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right) = 0 \\
&\therefore m\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0 \\
&\therefore mr^2\frac{d\theta}{dt} = c
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

となる．ここに記号 c は積分定数である．この式の左辺は $m(rd\theta/dt)\times r$ であり，運動量のモーメント，すなわち角運動量が時間的に一定であることを表す．惑星 P の単位質量当たりの角運動量 c/m を h とすると（$c = mh$ とすると），

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h \tag{5}$$

となる．この定数 h の 1/2 倍の $h/2$ を面積速度と言い，その単位は m^2/s である．この式はケプラーの第 2 法則（Kepler's second law）「惑星の太陽のまわりの面積速度は時間にかかわらず一定である」を表している．いま惑星の初期条件を図 2 に示すように，時刻 $t = 0$ のとき，動径 r_0，速度 v_0，偏角 c'とし，動径 r_0 と速度 v_0 のなす角度を α とする．

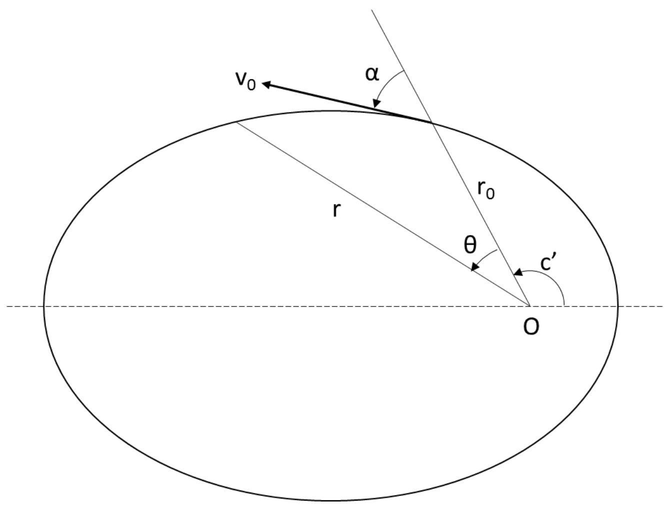

図 2 初期条件

この図より，面積速度の式(5)の定数項 h は，

$$h = r_0 v_0 \sin\alpha \tag{6}$$

である．

2. ケプラーの第 1 法則

面積速度の式(5)を運動方程式(3)の第 1 式（半径方向の式）に代入して偏角 θ を消去すると，

$$m\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{h}{r^2}\right)^2\right)=-G\frac{Mm}{r^2}$$
$$\therefore m\left(\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{h^2}{r^3}\right)=-G\frac{Mm}{r^2} \tag{7}$$

となる．ここで，両辺に dr/dt をかけて時間積分すると，

$$m\left(\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{h^2}{r^3}\cdot\frac{dr}{dt}+G\frac{M}{r^2}\cdot\frac{dr}{dt}\right)=0$$
$$\therefore m\left(\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{h^2}{r^2}-\frac{GM}{r}\right)=E \tag{8}$$

となる．ここに，記号 E は積分定数であり，単位はエネルギー(J）である．式(6)のときと同じ初期条件（r_0, v_0, α）を使うと，

$$m\left(\frac{1}{2}\left(v_0\cos\alpha\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(r_0v_0\sin\alpha\right)^2}{{r_0}^2}-\frac{GM}{r_0}\right)=E$$
$$\therefore \frac{1}{2}m{v_0}^2-\frac{GMm}{r_0}=E \tag{9}$$

となる．この式から積分定数 E を求めることができる．E は時間的に一定であるから，初期条件以外の一般の位置においても次式が成り立つ．

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}=E \tag{10}$$

左辺の第 1 項は惑星の運動エネルギーであり，第 2 項は惑星の位置エネルギーである．この位置エネルギーは符号が負であり，無限遠（$r\to\infty$）で 0 となる．面積速度の式(5)を使って式(8)を変形すると，

$$
\begin{aligned}
&m\left(\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{h^2}{r^2}\right)-\frac{GMm}{r}=E\\
&\therefore m\left(\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{h}{r^2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{h^2}{r^2}\right)-\frac{GMm}{r}=E\\
&\therefore \frac{1}{2}mh^2\left(\left(\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{GMm}{r}=E
\end{aligned}
\tag{11}
$$

となる．ここで，

$$
z=\frac{1}{r} \tag{12}
$$

と変数変換すると，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}mh^2\left(\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2+z^2\right)-GMmz=E\\
&\therefore \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2+z^2-\frac{2GMm}{mh^2}z=\frac{2E}{mh^2}\\
&\therefore \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2=\frac{2E}{mh^2}+\frac{2GM}{h^2}z-z^2\\
&\therefore \frac{dz}{d\theta}=\pm\sqrt{\frac{2E}{mh^2}+\frac{2GM}{h^2}z-z^2}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

となる．さらに GM/h^2 は定数であることに注意して変形すると，

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\theta}\left(z-\frac{GM}{h^2}\right)=\pm\sqrt{\frac{2E}{mh^2}+\frac{G^2M^2}{h^4}-\left(z-\frac{GM}{h^2}\right)^2}\\
&\therefore d\theta=\pm\frac{d\left(z-\frac{GM}{h^2}\right)}{\sqrt{\frac{2E}{mh^2}+\frac{G^2M^2}{h^4}-\left(z-\frac{GM}{h^2}\right)^2}}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

となり，変数 z と θ の変数分離形となる．ここで，

$$X = z - \frac{GM}{h^2},\quad A^2 = \frac{2E}{mh^2} + \frac{G^2M^2}{h^4} \tag{15}$$

とおくと，

$$d\theta = \pm\frac{dX}{\sqrt{A^2 - X^2}} \tag{16}$$

となり，変数 X と θ の変数分離形となる．ここで，逆三角関数の微分公式；

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}\frac{x}{a}\right) = -\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \tag{17}$$

を使って式(16)の両辺を積分すると，

$$\begin{aligned}&\theta + c' = \mp\cos^{-1}\left(\frac{X}{A}\right)\\ &\therefore \cos(\theta + c') = \frac{X}{A}\end{aligned} \tag{18}$$

となる．ここに，記号 c' は積分定数であり，偏角の初期値である．変数 X と定数 A を元の式に戻すと，

$$\begin{aligned}&\cos(\theta + c') = \frac{z - \frac{GM}{h^2}}{\sqrt{\frac{2E}{mh^2} + \frac{G^2M^2}{h^4}}}\\ &\therefore \frac{1}{r} - \frac{GM}{h^2} = \sqrt{\frac{2E}{mh^2} + \frac{G^2M^2}{h^4}}\cos(\theta + c')\\ &\quad = \frac{GM}{h^2}\sqrt{\frac{2E}{mh^2}\cdot\frac{h^4}{G^2M^2} + 1}\cos(\theta + c')\\ &\quad = \frac{GM}{h^2}\sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{mG^2M^2}}\cos(\theta + c')\end{aligned} \tag{19}$$

となり，動径 r の式が求められた．積分定数 c'（偏角の初期値）は初期条件を代入した式；

$$\frac{1}{r_0}-\frac{GM}{h^2}=\frac{GM}{h^2}\sqrt{1+\frac{2Eh^2}{mG^2M^2}}\cos c' \tag{20}$$

から求めることができる（力学的エネルギーEも(9)式から求められる）．ここで，

$$\frac{h^2}{GM}=l \tag{21}$$

$$\sqrt{1+\frac{2Eh^2}{mG^2M^2}}=e \tag{22}$$

とおくと，動径 r の式(19)は，

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{l}=\frac{e}{l}\cos(\theta+c')$$

$$\therefore \frac{1}{r}=\frac{1+e\cos(\theta+c')}{l}$$

$$\therefore r=\frac{l}{1+e\cos(\theta+c')} \tag{23}$$

となる．これは極座標系における円錐曲線(conic section, conic curve)の式に他ならない．式(21)の距離 l を半直弦または半通経(semi-latus rectum)と言う．式(22)の無次元数の e を離心率(eccentricity)と言う．離心率 e と円錐曲線の種類との関係を次表に示す．

表 1 円錐曲線と離心率

離心率 e	円錐曲線の種類
$e=0$	円
$0<e<1$	楕円
$e=1$	放物線
$e>1$	双曲線

離心率 $e\geqq 1$ の場合，物体は太陽に近づいたあと，永遠に戻ってこない．惑星はまた戻ってくるから，軌道は楕円である．式(23)はケプラーの第 1 法則（Kepler's first law）「惑星は太陽を焦点の 1 つとする楕円軌道を描く」を表している．楕円軌道の離心率 e は $0<e<1$ であるから，式(22)より，惑星の力学的エネルギーE の符号は負($E<0$）であることがわかる．

図 3 に惑星の楕円軌道を示す．点 O は太陽であり，楕円の焦点の一つである．点 P は惑星であり，惑星が太陽に最も近づく点 K を近日点(perihelion)と言い，距離 OK＝a(1－e) を近日点距離と言う．一方，惑星が太陽から最も遠ざかる点 E を遠日点(aphelion)と言い，距離 OE＝a(1＋e) を遠日点距離と言う．点 C は楕円の中心であり，近日点 K と遠日点 E の中点である．中心 C と焦点 O の距離は ae である．動径 OP が OK となす角度ϕを真近点離角(true anomaly)と言う．図中の外側の円は長半径 a を半径とする円であり，惑星 P から短半径方向に延長した直線との交点を点 Q とする．円の半径 CQ が CK となす角度 u を離心近点離角(eccentric anomaly)と言う．点 O を通り短半径方向に楕円軌道を切った長さの 1/2 が半直弦 l である．

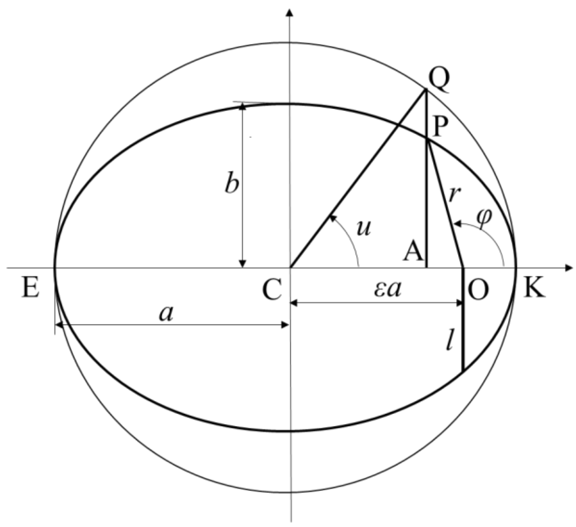

図 3 惑星の楕円軌道

円錐曲線の式(23)より，真近点離角 $\theta + c' = \pi/2$ のとき，動径 $r = l$ （半通経）となる．また，半通経 l と長半径 a, 短半径 b との関係は，式(23)より

$$\begin{aligned}
&\overline{OK} = a(1-e) = \frac{l}{1+e} \\
&\overline{OE} = a(1+e) = \frac{l}{1-e} \\
&\therefore a = \frac{l}{1-e^2} \\
&b^2 = a^2 - (ae)^2 = a^2(1-e^2) \\
&\therefore b = a\sqrt{1-e^2} = \frac{l}{1-e^2}\sqrt{1-e^2} = \frac{l}{\sqrt{1-e^2}}
\end{aligned} \tag{24}$$

となる．図 3 の真近点離角 ϕ と離心近点離角 u との間には，

$$\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\phi}{2}=\tan\frac{u}{2} \tag{25}$$

の関係が成り立つ．この式をガウスの方程式（Gauss' equation）と言う．円軌道の場合は，離心率 $e=0$ であるから真近点離角 ϕ と離心近点離角 u は一致する．上式の証明を次に示す．

$$\begin{aligned}
&\overline{CA}=a\cos u\\
&\overline{CA}=\overline{CO}+\overline{OA}=ea+r\cos\phi\\
&\quad=ea+\frac{l}{1+e\cos\phi}\cos\phi=ea+\frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\phi}\cos\phi\\
&\therefore\cos u=e+\frac{\left(1-e^2\right)\cos\phi}{1+e\cos\phi}\\
&\therefore\left(\cos u-e\right)\left(1+e\cos\phi\right)=\left(1-e^2\right)\cos\phi\\
&\therefore\cos u-e=\left(\left(1-e^2\right)-e\left(\cos u-e\right)\right)\cos\phi=\left(1-e\cos u\right)\cos\phi\\
&\therefore\cos\phi=\frac{\cos u-e}{1-e\cos u}\\
&\therefore\tan^2\frac{\phi}{2}=\frac{1-\cos\phi}{1+\cos\phi}=\frac{1-\dfrac{\cos u-e}{1-e\cos u}}{1+\dfrac{\cos u-e}{1-e\cos u}}=\frac{1-e\cos u-\cos u+e}{1-e\cos u+\cos u-e}\\
&\quad=\frac{(1+e)-(1+e)\cos u}{(1-e)+(1-e)\cos u}=\frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{1-\cos u}{1+\cos u}=\frac{1+e}{1-e}\tan^2\frac{u}{2}\\
&\therefore\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\phi}{2}=\tan\frac{u}{2}
\end{aligned}$$

証明終わり

3.　ケプラーの第 3 法則

楕円の面積は πab で表され，惑星は一定の面積速度 $h/2$ で公転するから，公転周期は，

$$T=\frac{\pi ab}{h/2}=\frac{2\pi ab}{h} \tag{26}$$

と表される．この式に長半径 a と短半径 b の式(24)を代入すると，

$$T=\frac{2\pi ab}{h}=\frac{2\pi}{h}\cdot\frac{GMm}{-2E}\cdot h\sqrt{\frac{m}{-2E}}=2\pi\frac{GMm^{1.5}}{(-2E)^{1.5}}=\frac{2\pi}{\sqrt{GM}}\left(\frac{GMm}{-2E}\right)^{1.5}$$

$$\therefore T=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} \tag{27}$$

となる．この式より，惑星の公転周期 T は長半径 a の大きさで決まり，離心率 e に依らないことがわかる．また，惑星の平均角速度は√(GM/a³) と表されることがわかる．この式はケプラーの第 3 法則（Kepler's third law)「惑星の周期の 2 乗は長半径の 3 乗に比例する」を表している．

また，この式から，定数 GM を長半径 a と周期 T で表すこともできる．

$$T^2=4\pi^2\frac{a^3}{GM}$$

$$\therefore GM=\frac{4\pi^2a^3}{T^2}=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2a^3 \tag{28}$$

【計算例】

式(27)のグラフを図 4 の青線に示す．縦軸は周期 T で，単位はユリウス暦（365.25 日)である．横軸は長半径 a で，単位は天文単位（astronomical unit, 1 au≒1.496×10^{11} m）である．図中の橙色の点は，水星から海王星までの 8 個の惑星である．左から 3 番目が地球である．各惑星の周期と長半径の値は理科年表による．

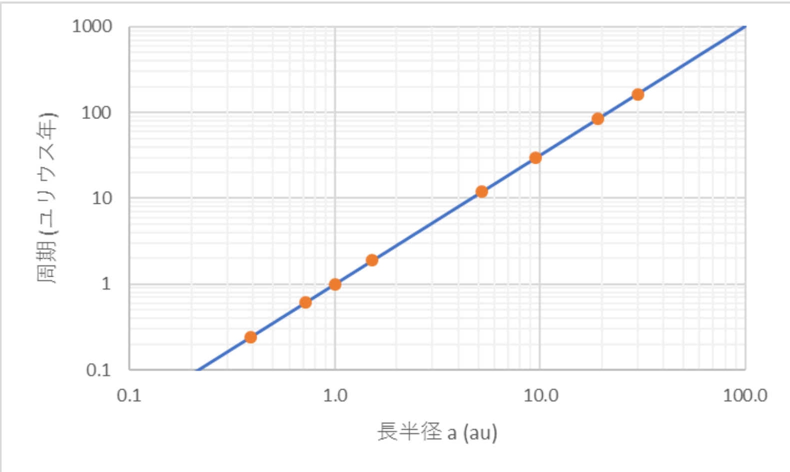

図 4 惑星の周期と長半径

4.　惑星のエネルギーと速度

長半径 a と短半径 b の式(24)に，半直弦の式(21)と離心率の式(22)を代入すると，

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{l}{1-e^2} = \frac{\dfrac{h^2}{GM}}{-\dfrac{2Eh^2}{mG^2M^2}} = \frac{1}{-\dfrac{2E}{mGM}} = \frac{GMm}{-2E} \\
b &= \frac{l}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{\dfrac{h^2}{GM}}{\sqrt{-\dfrac{2Eh^2}{mG^2M^2}}} = \frac{h}{\sqrt{-\dfrac{2E}{m}}} = h\sqrt{\frac{m}{-2E}}
\end{aligned}
\tag{29}
$$

となる．ここに，力学的エネルギーEの符号は負であることに注意する．長半径 a は惑星の力学的エネルギーEだけで決まるが，短半径 b は，力学的エネルギーEと角運動量 $c = mh$ の両者から決まることがわかる．長半径 a の式より，惑星の力学的エネルギーEは，

$$
E = -\frac{GMm}{2a} \tag{30}
$$

となる．力学的エネルギーEの式(30)を，力学的エネルギーの保存則の式(10)に代入すると，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2a} \\
&\therefore v^2 - \frac{2GM}{r} = -\frac{GM}{a} \\
&\therefore v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} \tag{31}
$$

となり，惑星の速度 v が，太陽からの距離 r の関数として求められた．近日点で速度が最も大きくなり，遠日点で速度が最も小さくなる．この式を vis-viva 方程式（vis-viva equation）と言う．この式の中の定数 GM に式(28)を代入すると，

$$
v = \sqrt{\frac{4\pi^2a^3}{T^2}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} = \frac{2\pi a}{T}\sqrt{\frac{2a}{r} - 1} \tag{32}
$$

とも表される．式(31)において，$r = a$（長半径）における速度を平均速度 $v_{\rm mean}$ とすると，

$$v_{mean} = \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

となる．地球の長半径 a は 1 天文単位（au≒1.496×10^{11} m）であるから，地球の平均速度は，$v_{\rm mean} = 29.8$ km/s となる．また，式(31)において，長半径 $a \rightarrow \infty$（無限大）とすると，

$$v_E = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

となる．これは太陽からの距離 r の位置から太陽系を脱出するのに必要な速度であり，地球の長半径 $r = a$ においては，$v_{\rm E} = 42.1$ km/s となる．

近日点の速度 $v_{\rm p}$ は，式(31)に $r = a\,(1 - e)$ を代入して，

$$\begin{aligned} v_p &= \sqrt{GM\left(\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{GM}{a}\left(\frac{2}{1-e} - 1\right)} \\ &= \sqrt{\frac{GM}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e}} \end{aligned}$$

となる．したがって，式(5)の定数 h（面積速度の 2 倍）は，上式と式(6)より，

$$\begin{aligned} h &= r_p v_p \sin\frac{\pi}{2} = a(1-e)\sqrt{\frac{GM}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e}} \\ &= \sqrt{aGM\left(1-e^2\right)} \end{aligned}$$

となる．上式は，楕円の面積 $S = \pi ab$ と式(27)の周期 T から，

$$\begin{aligned} h &= \frac{2S}{T} = \frac{2\pi ab}{2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{GM}}} = \sqrt{\frac{b^2 GM}{a}} \\ &= \sqrt{aGM\left(1-e^2\right)} \end{aligned}$$

と求めることもできる．

5. ケプラーの方程式

惑星の位置と時間の関係を求める．面積速度の式(5)より，

$$
\begin{aligned}
&r^2 \frac{d\theta}{dt} = h \\
&\therefore dt = r^2 \frac{d\theta}{h} = r^2 \frac{d\phi}{h}
\end{aligned}
\tag{33}
$$

となる．この式に円錐曲線の式(23)を代入すると，

$$
dt = \left(\frac{l}{1 + e\cos\phi} \right)^2 \frac{d\phi}{h} = \frac{l^2}{h} \cdot \frac{d\phi}{\left(1 + e\cos\phi\right)^2} \tag{34}
$$

となる．ここに，

$$
\phi = \theta + c' \tag{35}
$$

と変数変換した．式(34)の両辺を積分すると，

$$
t + c'' = \frac{l^2}{h\left(1 - e^2\right)} \left(-\frac{e\sin\phi}{1 + e\cos\phi} + \frac{2}{\sqrt{1 - e^2}} \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan\frac{\phi}{2} \right) \right) \tag{36}
$$

となる．ここに，記号 c'' は積分定数であり，単位は時間(s) である．上式の証明として，式(36)の右辺を ϕ で微分すると式(34)の右辺に一致することを以下に示す．

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\phi}\left(\frac{l^2}{h\left(1-e^2\right)}\left(-\frac{e\sin\phi}{1+e\cos\phi}+\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\phi}{2}\right)\right)\right)\\
&=\frac{l^2}{h\left(1-e^2\right)}\left(\begin{array}{l}-\dfrac{e\cos\phi\left(1+e\cos\phi\right)-e\sin\phi\left(-e\sin\phi\right)}{\left(1+e\cos\phi\right)^2}\\ \quad+\dfrac{2}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}}\tan\dfrac{\phi}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}}\sec^2\dfrac{\phi}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\end{array}\right)\\
&=\frac{l^2}{h\left(1-e^2\right)}\left(\begin{array}{l}-\dfrac{e\cos\phi+e^2\cos^2\phi+e^2\sin^2\phi}{\left(1+e\cos\phi\right)^2}\\ \quad+\dfrac{1}{\sqrt{\left(1-e\right)\left(1+e\right)}}\sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}}\dfrac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}}\tan\dfrac{\phi}{2}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\phi}{2}}\end{array}\right)\\
&=\frac{l^2}{h\left(1-e^2\right)}\left(-\frac{e\cos\phi+e^2}{\left(1+e\cos\phi\right)^2}+\frac{1}{1+e}\cdot\frac{1}{\cos^2\dfrac{\phi}{2}+\dfrac{1-e}{1+e}\sin^2\dfrac{\phi}{2}}\right)\\
&=\frac{l^2}{h\left(1-e^2\right)}\left(-\frac{e\cos\phi+e^2}{\left(1+e\cos\phi\right)^2}+\frac{1}{\left(1+e\right)\dfrac{1+\cos\phi}{2}+\left(1-e\right)\dfrac{1-\cos\phi}{2}}\right)\\
&=\frac{l^2}{h\left(1-e^2\right)}\left(-\frac{e\cos\phi+e^2}{\left(1+e\cos\phi\right)^2}+\frac{1}{1+e\cos\phi}\right)\\
&=\frac{l^2}{h\left(1-e^2\right)}\cdot\frac{-e\cos\phi-e^2+1+e\cos\phi}{\left(1+e\cos\phi\right)^2}\\
&=\frac{l^2}{h\left(1-e^2\right)}\cdot\frac{-e^2+1}{\left(1+e\cos\phi\right)^2}\\
&=\frac{l^2}{h}\cdot\frac{1}{\left(1+e\cos\phi\right)^2}
\end{aligned}
$$

証明終わり

式(36)の積分定数 c''（時刻の初期値）は，初期条件を代入した式；

$$
c''=\frac{l^2}{h\left(1-e^2\right)}\left(-\frac{e\sin c'}{1+e\cos c'}+\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{c'}{2}\right)\right) \tag{37}
$$

から求めることができる．

式(25)を使って，式(36)の真近点離角ϕを離心近点離角uで表す．まず，式(36)の右辺の括弧の中の第1項は，

$$
\begin{aligned}
\frac{e\sin\phi}{1+e\cos\phi} &= \frac{2e\sin\dfrac{\phi}{2}\cos\dfrac{\phi}{2}}{1+e\left(2\cos^2\dfrac{\phi}{2}-1\right)} = \frac{2e\sin\dfrac{\phi}{2}\cos\dfrac{\phi}{2}}{1-e+2e\cos^2\dfrac{\phi}{2}} = \frac{2e\tan\dfrac{\phi}{2}}{\dfrac{1-e}{\cos^2\dfrac{\phi}{2}}+2e} \\
&= \frac{2e\tan\dfrac{\phi}{2}}{(1-e)\dfrac{\sin^2\dfrac{\phi}{2}+\cos^2\dfrac{\phi}{2}}{\cos^2\dfrac{\phi}{2}}+2e} = \frac{2e\tan\dfrac{\phi}{2}}{(1-e)\left(\tan^2\dfrac{\phi}{2}+1\right)+2e} \\
&= \frac{2e\tan\dfrac{\phi}{2}}{(1-e)\tan^2\dfrac{\phi}{2}+1+e} = \frac{2e\sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\tan\dfrac{u}{2}}{(1-e)\left(\sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\tan\dfrac{u}{2}\right)^2+1+e} \\
&= \frac{2e\sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\tan\dfrac{u}{2}}{(1-e)\dfrac{1+e}{1-e}\tan^2\dfrac{u}{2}+1+e} = \frac{2e\sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\tan\dfrac{u}{2}}{(1+e)\left(\tan^2\dfrac{u}{2}+1\right)} \\
&= \frac{2e}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\tan\dfrac{u}{2}}{\tan^2\dfrac{u}{2}+1} = \frac{2e}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\sin\dfrac{u}{2}\cos\dfrac{u}{2}}{\sin^2\dfrac{u}{2}+\cos^2\dfrac{u}{2}} \\
&= \frac{e\sin u}{\sqrt{1-e^2}}
\end{aligned}
\tag{38}
$$

となる．次に，式(36)の右辺の括弧の中の第2項は，

$$
\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\phi}{2}\right) = \tan^{-1}\left(\tan\frac{u}{2}\right) = \frac{u}{2} \tag{39}
$$

となるから，式(36)は，

$$\begin{aligned} t + c'' &= \frac{l^2}{h\left(1-e^2\right)}\left(-\frac{e\sin u}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\frac{u}{2}\right) \\ &= \frac{l^2}{h\left(1-e^2\right)^{1.5}}\left(u - e\sin u\right) \end{aligned} \tag{40}$$

となる．この式の右辺左側の係数は，長半径 a と短半径 b の式(24)と，公転周期 T の式(26)より，

$$\frac{l^2}{h\left(1-e^2\right)^{1.5}} = \frac{ab}{h} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi ab}{h/2} = \frac{T}{2\pi} \tag{41}$$

であるから，式(40)は，

$$\begin{aligned} & t + c'' = \frac{T}{2\pi}\left(u - e\sin u\right) \\ & \therefore \frac{2\pi}{T}\left(t + c''\right) = u - e\sin u \end{aligned} \tag{42}$$

となる．左辺の係数 $2\pi/T$ は惑星の平均角速度（天文学では平均運動と言う）であり，記号 n で表す．また，時刻 t を $u=0$ の位置から測るとすれば，

$$nt = u - e\sin u, \quad n = \frac{2\pi}{T} \tag{43}$$

となる．この式は時刻 t と離心近点離角 u の間の関係を表しており，ケプラーの方程式(Kepler’s equation）と言う．この式の左辺の nt を平均近点離角(mean anomaly)と言う．

軌道の離心率 e が既知の場合, 離心近点離角 u から平均近点離角 nt を求めるのは容易だが, 逆に平均近点離角 nt から離心近点離角 u を求めるには，Excel のソルバーなどの数値計算が必要になる．

離心近点離角 u と半径 r との間には,

$$r = a\left(1 - e\cos u\right) \tag{44}$$

の関係が成り立つ．その証明を以下に記す．

$$\cos\phi = 2\cos^2\frac{\phi}{2} - 1 = 2\frac{\cos^2\frac{\phi}{2}}{\cos^2\frac{\phi}{2}+\sin^2\frac{\phi}{2}} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\frac{\phi}{2}} - 1$$

$$= \frac{1-\tan^2\frac{\phi}{2}}{1+\tan^2\frac{\phi}{2}} = \frac{1-\frac{1+e}{1-e}\tan^2\frac{u}{2}}{1+\frac{1+e}{1-e}\tan^2\frac{u}{2}} = \frac{1-e-(1+e)\tan^2\frac{u}{2}}{1-e+(1+e)\tan^2\frac{u}{2}}$$

$$= \frac{1-\tan^2\frac{u}{2} - e\left(1+\tan^2\frac{u}{2}\right)}{1+\tan^2\frac{u}{2} - e\left(1-\tan^2\frac{u}{2}\right)} = \frac{1-\frac{1-\cos u}{1+\cos u} - e\left(1+\frac{1-\cos u}{1+\cos u}\right)}{1+\frac{1-\cos u}{1+\cos u} - e\left(1-\frac{1-\cos u}{1+\cos u}\right)}$$

$$= \frac{\frac{2\cos u}{1+\cos u} - e\frac{2}{1+\cos u}}{\frac{2}{1+\cos u} - e\frac{2\cos u}{1+\cos u}} = \frac{2\cos u - 2e}{2-2e\cos u} = \frac{\cos u - e}{1-e\cos u}$$

$$\therefore r = \frac{l}{1+e\cos\phi} = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\phi} = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\frac{\cos u - e}{1-e\cos u}} = \frac{a\left(1-e^2\right)\left(1-e\cos u\right)}{1-e\cos u + e\left(\cos u - e\right)}$$

$$= \frac{a\left(1-e^2\right)\left(1-e\cos u\right)}{1-e^2} = a\left(1-e\cos u\right)$$

証明終わり

まとめると，惑星の運動の時刻 t，動径 r，真近点離角 ϕ は，離心近点離角 u をパラメータとして以下のように表される．

$$nt = u - e\sin u,\quad n = \frac{2\pi}{T},\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

$$r = a\left(1-e\cos u\right),\quad \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\phi}{2} = \tan\frac{u}{2}$$

【計算例】

ハレー彗星（ハリー彗星）の軌道を図 5 に示す．長半径 $a = 17.834$ au，離心率 $e = 0.96714$

とする．原点は太陽である．周期 T（≒75 年）を 100 等分した時間間隔（0.75 年）ごとの位置を示す．ケプラーの方程式を解くには，Excel のソルバーを利用した．

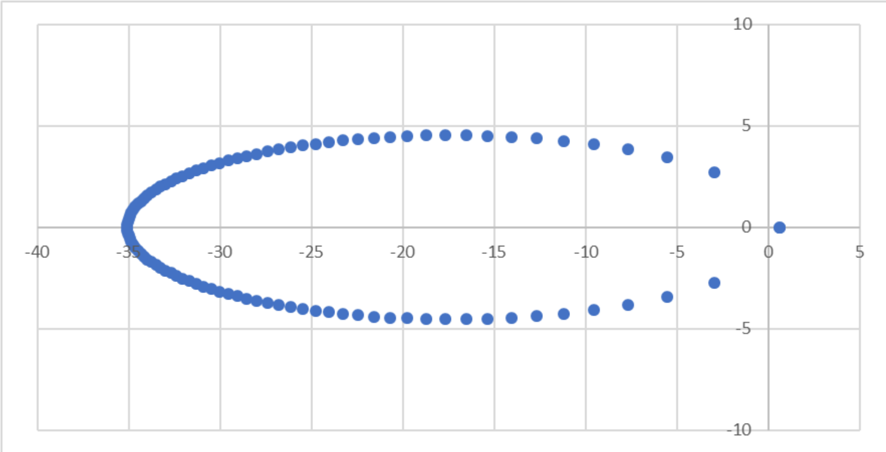

図 5 ハレー彗星の軌道

プロット間隔の違いから，右側の近日点付近では速度が速く，左側の遠日点付近では速度が遅いことがわかる．

関連文書

守屋富次郎，鷲津久一郎，力学概論　改訂版，培風館，1968
原島鮮，力学　三訂版，裳華房，1985
小出昭一郎，物理学　三訂版，裳華房，1997
日本機械学会編，機械工学便覧　改訂第 5 版，1968
国立天文台編，理科年表　平成 29 年，丸善出版，2016

