

大圏航路

地球表面上のある地点から他のある地点に移動するのに最短の航路を大圏航路 (great circle route) と言い, 大圏航路をとる航法を大圏航法 (great circle navigation) と言う. 以下, 大圏航路の計算方法について記す. 地球は厳密には回転楕円体であるが, 球で近似する.

1. 球面三角形

平面上の 2 点を結ぶ最短の曲線は, その 2 点を通る直線である. 同様に, 球面上の曲線であって, 球面上の 2 点を結ぶ最短の曲線は, その 2 点を通る大円である. 大円とは, 球面上の 2 点と球の中心の 3 点を通る平面が, 球と交わる交線である. 大円の半径は球の半径に等しい. (英語では, 大圏と大円はともに great circle である.)

下図に示すように, 球面上に互いに異なる 3 個の大円を描くと, 球面は 8 個に分割される. 分割された球面の各々を球面三角形 (spherical triangle) と呼ぶ. 球面三角形に関する計算には球面三角法 (spherical trigonometry) が利用される.

下図に太線で示す球面三角形の 3 個の頂点を A, B, C とし, 各頂点の対辺 (円弧) を順に a, b, c とする. 球の中心を O とし, 球の半径を 1 (単位長さ) とすると, 3 辺 (円弧) a, b, c の長さはその辺の両端を見込む中心角 $\angle BOC, \angle COA, \angle AOB$ に等しい.

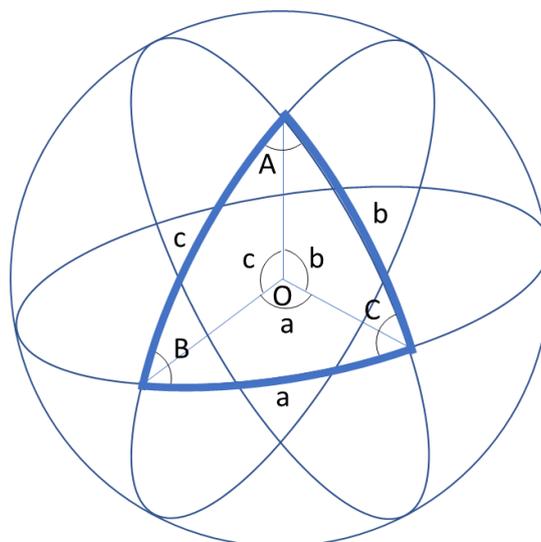


図 1 球面三角形

球面三角形 ABC について、下式の余弦定理 (cosine rule) が成り立つ。3 辺と 1 頂角の間に成り立つ公式である。他に正弦定理や余接定理などもあるが、それらの定理は余弦定理から導かれる。球面三角法の詳細は、資料「球面三角法」を参照。本資料では余弦定理のみを使用して計算する。

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \quad (1-1)$$

$$\cos b = \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos B \quad (1-2)$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C \quad (1-3)$$

2. 地球表面上の距離

下図に地球を示す。地球の半径を 1 (単位長さ) とする。点 N は北極点(north pole), 赤線は赤道(equator) である。地球の中心 O は図示していない。地球表面上の位置は緯度 (latitude) λ と経度(longitude) μ で表す。緯度 λ の範囲は $-\pi/2 \sim \pi/2$ であり、経度 μ の範囲は $-\pi \sim \pi$ である。図 2 の点 P, Q を地球表面上の任意の 2 地点とする。点 P は西側 (北に向かって左側), 点 Q は東側 (北に向かって右側) とする。北極 N と点 P を通る大円は点 P における子午線(meridian) であり、北極 N と点 Q を通る大円は点 Q における子午線である。ここで、太線で示す球面三角形 NPQ を考える。

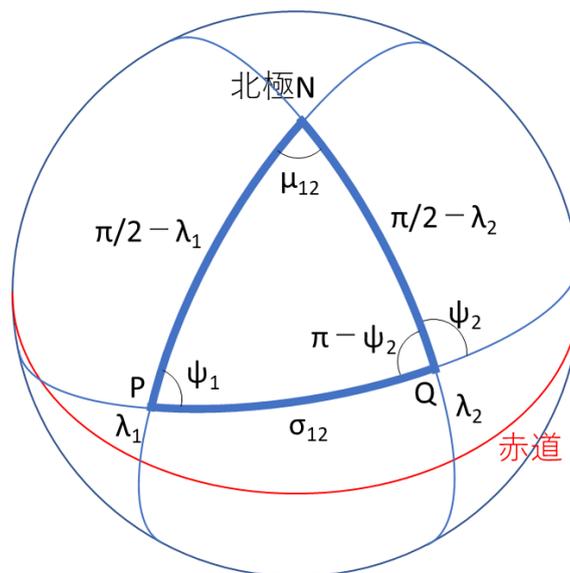


図 2 北極と任意の 2 地点からなる球面三角形

- 2 地点 P, Q の緯度を λ_1, λ_2 とする。緯度とは赤道からの角度であるから、辺 NP の長さは頂点 P の緯度 λ_1 の余角 ($\pi/2 - \lambda_1$), 辺 NQ の長さは頂点 Q の緯度 λ_2 の余角

$(\pi/2 - \lambda_2)$ である。

- 2 地点 P, Q の経度を μ_1, μ_2 とする。北極 N の頂角は 2 地点 P, Q の経度の差 $\mu_{12} = \mu_2 - \mu_1$ に等しい。経度差 μ_{12} は $0 \sim \pi$ の範囲にある。
- 2 地点 P, Q における航路の方位角 (azimuth) を ψ_1, ψ_2 とする。方位角 ψ とは、航路の大円と子午線がなす角度である。時計回り (北→東→南) に $0 \sim \pi$ の範囲とする。東側地点 Q では、航路の延長線と子午線がなす角度とする。東側地点 Q における頂角は方位角 ψ_2 の補角 $(\pi - \psi_2)$ である。
- 2 地点 P, Q の距離を σ_{12} とする。 $0 \sim \pi$ の範囲にある。

以上をまとめると、図 1 と図 2 の間には次表の対応関係が成り立つ。図 1 における 2 辺 b, c とその夾角 A が既知であり、辺 a と頂角 B, C が未知である。

表 1 球面三角形 NPQ

辺と頂角	値	範囲
A	μ_{12}	$0 \sim \pi$
B	ψ_1	$0 \sim \pi$
C	$\pi - \psi_2$	$0 \sim \pi$
a	σ_{12}	$0 \sim \pi$
b	$\pi/2 - \lambda_2$	$0 \sim \pi$
c	$\pi/2 - \lambda_1$	$0 \sim \pi$

上表の関係を余弦定理の式(1-1)に代入すると、

$$\begin{aligned} \cos \sigma_{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda_2\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda_1\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \lambda_2\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \lambda_1\right) \cos \mu_{12} \\ \therefore \cos \sigma_{12} &= \sin \lambda_2 \sin \lambda_1 + \cos \lambda_2 \cos \lambda_1 \cos \mu_{12} \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma_{12} = \cos^{-1}(\sin \lambda_1 \sin \lambda_2 + \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 \cos \mu_{12}) \quad (2)$$

となり、2 地点 P, Q の距離 σ_{12} が求められた。逆余弦関数 ($\cos^{-1}x$) は $0 \sim \pi$ の範囲で求める。

【計算例 1】 2 地点 P, Q が同じ子午線上にある場合の距離
2 地点の経度が等しいから、

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \mu_2, \\ \therefore \sigma_{12} &= \cos^{-1}(\sin \lambda_1 \sin \lambda_2 + \cos \lambda_2 \cos \lambda_1) = \cos^{-1}(\cos(\lambda_1 - \lambda_2)) = |\lambda_1 - \lambda_2|\end{aligned}$$

となり、2地点間の距離は緯度の差に一致する。

【計算例2】 2地点 P, Q がともに赤道にある場合の距離
2地点の緯度がともに 0 であるから、

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda_2 = 0, \\ \therefore \sigma_{12} &= \cos^{-1}(\cos \mu_{12}) = \mu_{12}\end{aligned}$$

となり、2地点間の距離は経度の差に一致する。

【計算例3】 地点 Q が、地点 P に対して地球の裏側（対蹠点）にある場合の距離
2地点の緯度は符号が逆になり、経度の差は π であるから、

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= -\lambda_1, \quad \mu_{12} = \pi, \\ \therefore \sigma_{12} &= \cos^{-1}(-\sin^2 \lambda_1 - \cos^2 \lambda_1) = \cos^{-1}(-1) = \pi\end{aligned}$$

となり、2地点間の距離は π （=大円の半周）になる。距離の最大値である。

3. 始点と終点の方位角

まず、西側地点 P における航路の方位角 ψ_1 を求める。余弦定理の式(1-2) に表 1 の対応関係を代入すると、

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda_2\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda_1\right) \cdot \cos \sigma_{12} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \lambda_1\right) \cdot \sin \sigma_{12} \cdot \cos \psi_1 \\ \therefore \sin \lambda_2 &= \sin \lambda_1 \cdot \cos \sigma_{12} + \cos \lambda_1 \cdot \sin \sigma_{12} \cdot \cos \psi_1 \\ \therefore \cos \psi_1 &= \frac{\sin \lambda_2 - \sin \lambda_1 \cdot \cos \sigma_{12}}{\cos \lambda_1 \cdot \sin \sigma_{12}}\end{aligned}$$

$$\therefore \psi_1 = \cos^{-1}\left(\frac{\sin \lambda_2 - \sin \lambda_1 \cdot \cos \sigma_{12}}{\cos \lambda_1 \cdot \sin \sigma_{12}}\right) \quad (3)$$

となり、西側地点 P における航路の方位角 ψ_1 が求められた。次に、東側地点 Q における航路の方位角 ψ_2 を求める。余弦定理の式(1-3) に表 1 の対応関係を代入すると、

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\lambda_1\right) &= \cos\sigma_{12} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}-\lambda_2\right) + \sin\sigma_{12} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}-\lambda_2\right) \cdot \cos(\pi-\psi_2) \\ \therefore \sin\lambda_1 &= \sin\lambda_2 \cdot \cos\sigma_{12} - \cos\lambda_2 \cdot \sin\sigma_{12} \cdot \cos\psi_1 \\ \therefore \cos\psi_2 &= \frac{\sin\lambda_2 \cdot \cos\sigma_{12} - \sin\lambda_1}{\cos\lambda_2 \cdot \sin\sigma_{12}}\end{aligned}$$

$$\therefore \psi_2 = \cos^{-1}\left(\frac{\sin\lambda_2 \cdot \cos\sigma_{12} - \sin\lambda_1}{\cos\lambda_2 \cdot \sin\sigma_{12}}\right) \quad (4)$$

となり，東側地点 Q における航路の方位角 ψ_2 が求められた。

【計算例 4】 2 地点 P, Q が同じ子午線上にある場合の方位角
緯度 $\lambda_2 > \lambda_1$ の場合，距離 $\sigma_{12} = \lambda_2 - \lambda_1$ （計算例 1 より）を式(3), (4)に代入すると，

$$\begin{aligned}\sin\lambda_2 - \sin\lambda_1 \cdot \cos(\lambda_2 - \lambda_1) &= \sin\lambda_2 - \sin\lambda_1 \cdot (\cos\lambda_2 \cdot \cos\lambda_1 + \sin\lambda_2 \cdot \sin\lambda_1) \\ &= \sin\lambda_2 (1 - \sin^2\lambda_1) - \sin\lambda_1 \cdot \cos\lambda_1 \cdot \cos\lambda_2 \\ &= \cos\lambda_1 (\sin\lambda_2 \cdot \cos\lambda_1 - \sin\lambda_1 \cdot \cos\lambda_2) \\ &= \cos\lambda_1 \cdot \sin(\lambda_2 - \lambda_1) \\ \therefore \psi_1 &= \cos^{-1}\left(\frac{\cos\lambda_1 \cdot \sin(\lambda_2 - \lambda_1)}{\cos\lambda_1 \cdot \sin(\lambda_2 - \lambda_1)}\right) = \cos^{-1}(1) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\lambda_2 \cdot \cos(\lambda_2 - \lambda_1) - \sin\lambda_1 &= \sin\lambda_2 \cdot (\cos\lambda_2 \cdot \cos\lambda_1 + \sin\lambda_2 \cdot \sin\lambda_1) - \sin\lambda_1 \\ &= -\sin\lambda_1 (1 - \sin^2\lambda_2) + \sin\lambda_2 \cdot \cos\lambda_2 \cdot \cos\lambda_1 \\ &= -\cos\lambda_2 (\sin\lambda_1 \cdot \cos\lambda_2 - \sin\lambda_2 \cdot \cos\lambda_1) \\ &= \cos\lambda_2 \cdot \sin(\lambda_2 - \lambda_1) \\ \therefore \psi_2 &= \cos^{-1}\left(\frac{\cos\lambda_2 \cdot \sin(\lambda_2 - \lambda_1)}{\cos\lambda_2 \cdot \sin(\lambda_2 - \lambda_1)}\right) = \cos^{-1}(1) = 0\end{aligned}$$

となり，2 地点 P, Q における方位角はともに 0（北向き）になる。緯度 $\lambda_2 < \lambda_1$ の場合，距離 $\sigma_{12} = \lambda_1 - \lambda_2$ を代入して計算すると，2 地点 P, Q における方位角はともに， $\cos^{-1}(-1) = \pi$ （南向き）になる。

【計算例 5】 2 地点 P, Q がともに赤道にある場合の方位角
2 地点の緯度がともに 0 であるから，

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

$$\therefore \psi_1 = \psi_2 = \cos^{-1}\left(\frac{0-0}{\sin \sigma_{12}}\right) = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$$

となり、2地点における方位角はともに $\pi/2$ (東向き) になる。

【計算例6】 地点 Q が、地点 P に対して地球の裏側 (対蹠点) にある場合の方位角
2地点の緯度は符号が逆になり、距離は π であるから、

$$\lambda_2 = -\lambda_1, \quad \sigma_{12} = \pi,$$

$$\therefore \psi_1 = \cos^{-1}\left(\frac{-\sin \lambda_1 + \sin \lambda_1}{0}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\psi_2 = \cos^{-1}\left(\frac{\sin \lambda_1 - \sin \lambda_1}{0}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{0}{0}\right)$$

となり、2地点における方位角は不定となる。地球の裏側 (対蹠点) に至る大円は無数に存在するためである。

4. 中間地点の緯度・経度・方位角

航路上の任意の中間地点 (way point) A の緯度・経度・方位角を求める。下図に太線で示す球面三角形 NPA を考える。NA は中間地点 A を通る子午線である。西側地点 P から中間地点 A までの距離 σ をパラメータとする ($0 \sim \sigma_{12}$ の範囲)。

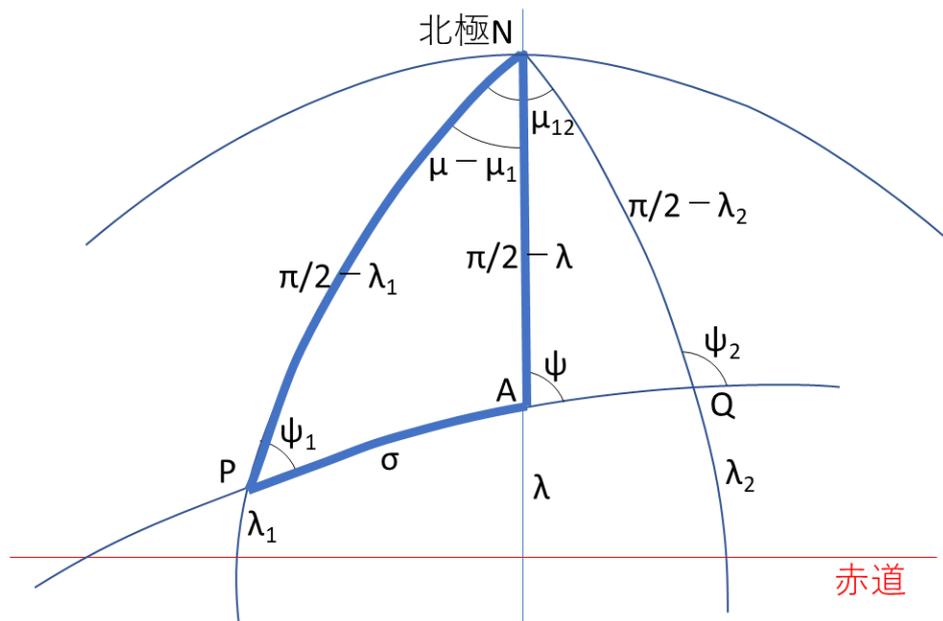


図3 北極 N, 西側地点 P, 中間地点 A を頂点する球面三角形

図1と図3の間には次表の対応関係が成り立つ。図1における2辺c, aとその夾角Bが既知であり、辺bと頂角C, Aが未知である。

表2 球面三角形NPA

辺と頂角	値	範囲
A	$\mu - \mu_0$	$0 \sim \pi$
B	ψ_1	$0 \sim \pi$
C	$\pi - \psi$	$0 \sim \pi$
a	σ	$0 \sim \pi$
b	$\pi/2 - \lambda$	$0 \sim \pi$
c	$\pi/2 - \lambda_1$	$0 \sim \pi$

上表の対応関係を余弦定理の式(1-2)に代入すると、

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda_1\right) \cdot \cos\sigma + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \lambda_1\right) \cdot \sin\sigma \cdot \cos\psi_1 \\ \therefore \sin\lambda &= \sin\lambda_1 \cdot \cos\sigma + \cos\lambda_1 \cdot \sin\sigma \cdot \cos\psi_1 \end{aligned}$$

$$\therefore \lambda = \sin^{-1}(\sin\lambda_1 \cdot \cos\sigma + \cos\lambda_1 \cdot \sin\sigma \cdot \cos\psi_1) \quad (5)$$

となり、中間地点Aの緯度 λ が求められた。逆正弦関数($\sin^{-1}x$)は $-\pi/2 \sim \pi/2$ の範囲で求める。また、表2の対応関係を余弦定理の式(1-1)に代入すると、

$$\begin{aligned} \cos\sigma &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda_1\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \lambda_1\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) \cdot \cos(\mu - \mu_0) \\ \therefore \cos\sigma &= \sin\lambda_1 \cdot \sin\lambda + \cos\lambda_1 \cdot \cos\lambda \cdot \cos(\mu - \mu_0) \\ \therefore \cos(\mu - \mu_0) &= \frac{\cos\sigma - \sin\lambda_1 \cdot \sin\lambda}{\cos\lambda_1 \cdot \cos\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \mu - \mu_0 &= \cos^{-1}\left(\frac{\cos\sigma - \sin\lambda_1 \cdot \sin\lambda}{\cos\lambda_1 \cdot \cos\lambda}\right) \\ \mu &= \mu_0 + (\mu - \mu_0) \end{aligned} \quad (6)$$

となり、中間地点Aの経度 μ が求められた。また、表2の対応関係を余弦定理の式(1-3)に代入すると、

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\lambda_1\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\lambda\right) \cdot \cos\sigma + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\lambda\right) \cdot \sin\sigma \cdot \cos(\pi-\psi) \\ \therefore \sin\lambda_1 &= \sin\lambda \cdot \cos\sigma - \cos\lambda \cdot \sin\sigma \cdot \cos\psi \\ \therefore \cos\psi &= \frac{\sin\lambda \cdot \cos\sigma - \sin\lambda_1}{\cos\lambda \cdot \sin\sigma}\end{aligned}$$

$$\therefore \psi = \cos^{-1}\left(\frac{\sin\lambda \cdot \cos\sigma - \sin\lambda_1}{\cos\lambda \cdot \sin\sigma}\right) \quad (7)$$

となり，中間地点 A の方位角が求められた。

5. 大圏航路の計算例

以下の計算例で距離を求めるにあたって，地球の半径を 6,371 km とした。（地球半周は 20,015 km となる。）

【計算例 7】 東京～ニューヨーク間の大圏航路

東京（成田国際空港）とニューヨーク（ジョン・F・ケネディ国際空港）の間の大圏航路を計算した結果を下図に示す。下図の横軸は経度，縦軸は緯度，左辺と右辺は東経 180 度（＝西経 180 度）の子午線である。上辺は北極，下辺は南極であり，両極とも実際は点であるが，辺に引き伸ばして描いている。

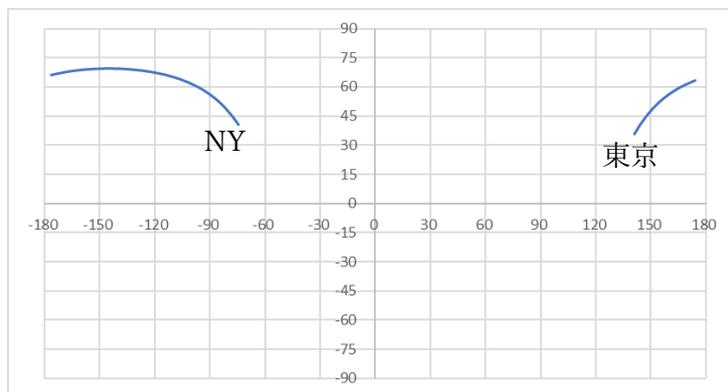


図 4-1 東京～ニューヨーク間の大圏航路の緯度・経度

Excel の「3D マップ」（「挿入」>「3D マップ」>「3D マップを開く」）を利用して，大圏航路を 3D の地図上に描いた結果を下図に示す。航路を 20 等分した点列で示している。北極圏を通過している。



図 4-2 東京～ニューヨーク間の大圏航路

東京での方位角は 25.4 deg, ニューヨークでの方位角は 152.6 deg, 2 地点間の距離は 10,831 km となる. 国土地理院の「距離と方位角の計算」サイトによる正確な計算(回転楕円体モデル)と比較すると, 方位角誤差は+0.03 deg(西側)と-0.04 deg(東側), 距離誤差は-24 km (-0.22%) である.

【計算例 8】 ロンドン～東京間の大圏航路

ロンドン(ヒースロー国際空港)と東京(成田国際空港)の間の大圏航路を計算した結果を下図に示す.

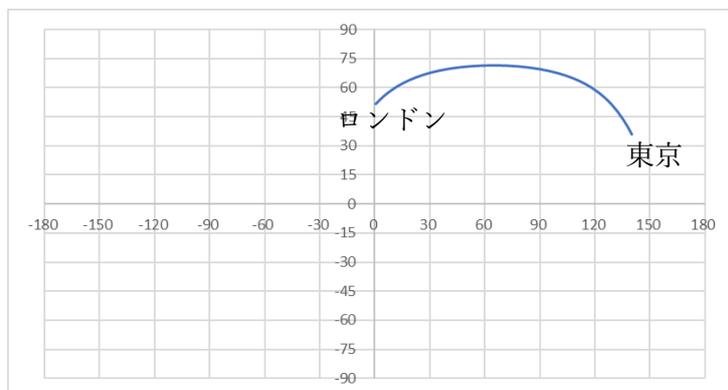


図 5-1 ロンドン～東京間の大圏航路の緯度・経度

Excelの「3D マップ」を利用して、大圏航路を3Dの地図上に描いた結果を下図に示す。航路を20等分した点列で示している。北極圏を通過している。



図 5-2 ロンドン～東京間の大圏航路

ロンドンでの方位角は 30.9 deg, 東京での方位角は 156.8 deg, 2 地点間の距離は 9,591 km となる。「距離と方位角の計算」サイトによる正確な計算と比較すると、方位角誤差は +0.04 deg (西側) と -0.00 deg (東側), 距離誤差は -24 km (-0.25%) である。

【計算例 9】東京～シドニー間の大圏航路

東京（成田国際空港）とシドニー（シドニー国際空港）との間の大圏航路を計算した結果を下図に示す。

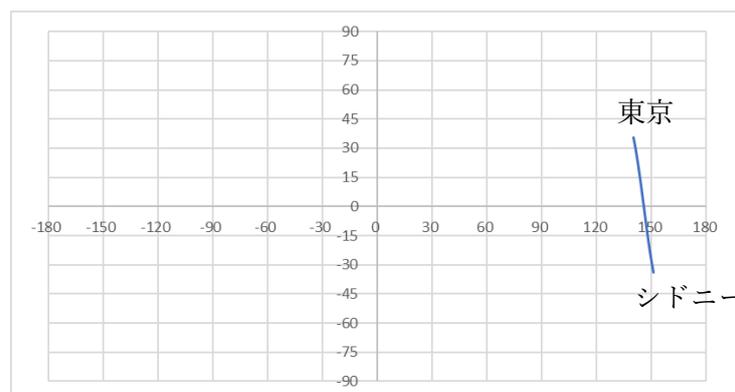


図 6-1 東京～シドニー間の大圏航路の緯度・経度

Excelの「3D マップ」を利用して、大圏航路を3Dの地図上に描いた結果を下図に示す。航路を20等分した点列で示している。西太平洋を通過している。



図 6-2 東京～シドニー間の大圏航路

東京での方位角は 170.5 deg, シドニーでの方位角も 170.7 deg, 2 地点間の距離は 7,831 km となる。「距離と方位角の計算」サイトによる正確な計算と比較すると、方位角誤差は西側・東側ともに +0.05 deg, 距離誤差は +34 km (+0.43%) である。

関連文書等

国土地理院, 距離と方位角の計算,

<https://vldb.gsi.go.jp/sokuchi/surveycalc/surveycalc/bl2stf.html>

国立研究開発法人 量子科学技術研究開発機構 放射線医学総合研究所, 航路線量計算システム(JISCARD), <http://www.jiscard.jp/index.shtml> (空港の緯度・経度データを利用した。)