

## 球面三角法

### 1. 球と大円

球 (sphere) とは、中心からの距離、すなわち半径が一定の点の集合からなる立体である。球と交わる平面を考えると、球と平面の交線はつねに円 (circle) である。特に、平面が球の中心を通る場合、その交線の円を大円 (great circle) と言う。大円の半径は球の半径に等しい。球と 1 個の大円を図 1 に示す。1 個の大円は球を半球 S1, S2 に 2 分割する。

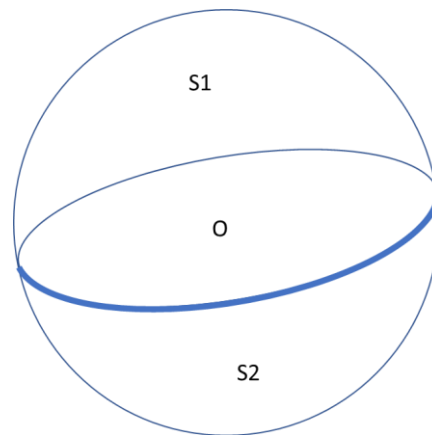


図 1 球と 1 個の大円

球と 2 個の大円を図 2 に示す。図中の直線は 2 平面の交線 (球の直径) を示す。2 つの大円は球を舟形 S1, S2, S3, S4 の 4 個に分割する。

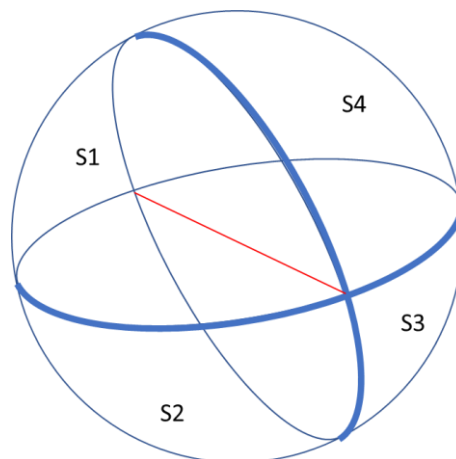


図 2 球と 2 個の大円

## 2. 球面三角形

球と3個の大円を図3に示す。図中の3本の直線は3平面の交線を示す。いずれも球の直径であるから、球の中心Oで交わる。3個の大円は球をS1, S2, ~ S8の8個に分割する。(S7はS1の反対側にあり、逆三角形形状の部分である。)

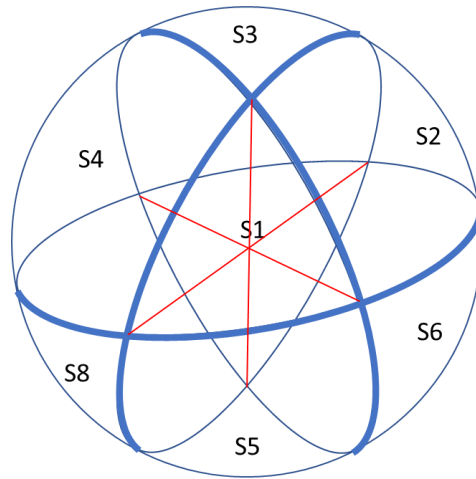


図3 球と3個の大円

8分割された球面の1個を図4に示す。この曲面は、3個の頂点と、3個の(円弧状の)辺を持ち、球面三角形 (spherical triangle) と呼ばれる。また、球面三角形に関する数学を球面三角法 (spherical trigonometry) と呼ぶ。以下、球面三角形の3個の頂点をA, B, Cとし、頂点Aの対辺をa, 頂点Bの対辺をb, 頂点Cの対辺をcとする。

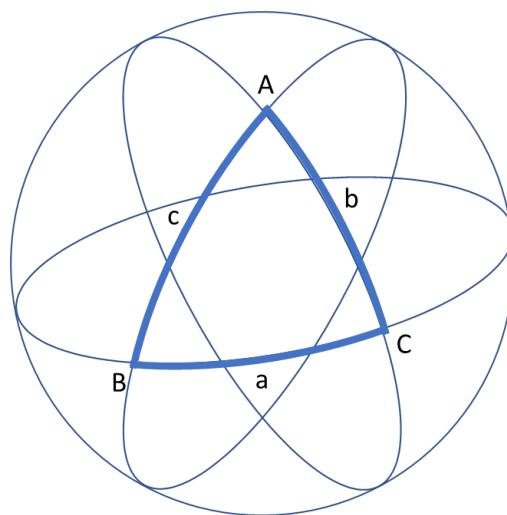


図4 球面三角形

球の半径  $OA$  の延長上から見た球面三角形を図 5 に示す。頂点  $A$  の内角  $A$  は、辺  $b$  と辺  $c$  が頂点  $A$  でなす角度であり、辺  $b$  を含む平面 ( $A, C, O$  の 3 点を含む平面) と、辺  $c$  を含む平面 ( $A, B, O$  の 3 点を含む平面) の交角である。

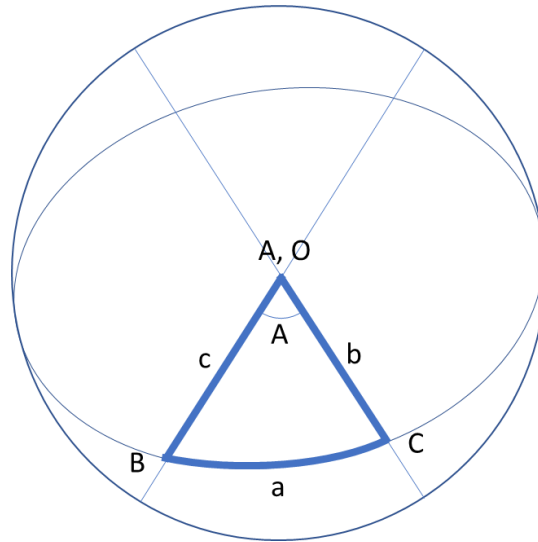


図 5 半径  $OA$  から見た球面三角形

ここで、球の半径の長さを 1 (単位長さ) と定義すると、円弧の長さは (半径)  $\times$  (中心角) であるから、図 6 に示すように、辺  $a$  の長さは中心角  $\angle BOC$  に等しくなる。同様に、辺  $b$  の長さは中心角  $\angle COA$  に等しく、辺  $c$  の長さは中心角  $\angle AOB$  に等しい。

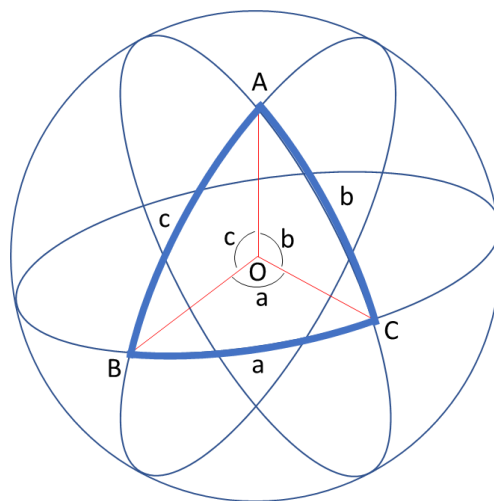


図 6 辺の長さ と 中心角

## 3. 余弦定理

球面上の1つの球面三角形（頂点 A, B, C）と球の中心 O がなす立体を図7に示す。扇形 BOC は半径 1 で中心角  $a$  である。同様に、扇形 COA は半径 1 で中心角  $b$  であり、扇形 AOB は半径 1 で中心角  $c$  である。ここで、頂点 A で球に接する平面を考える。半径 OB の延長線と（頂点 A の）接平面との交点を D とする。同様に、半径 OC の延長線と（頂点 A の）接平面との交点を E とする。

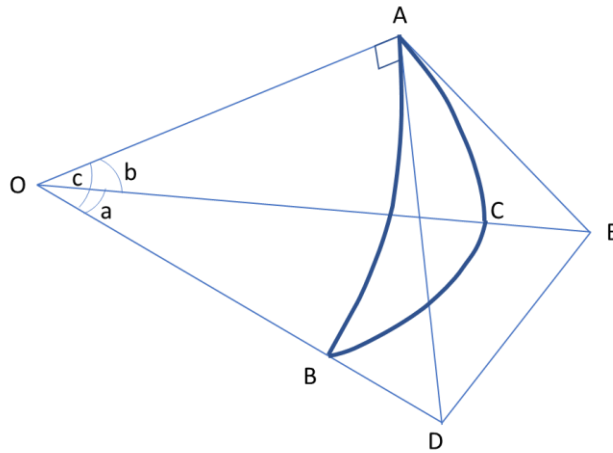


図7 球面三角形と中心

接平面上の3点 A, D, E を結ぶと（平面の）三角形が得られる。その三角形の  $\angle DAE$  は頂点 A の内角 A に等しい。また、接平面の定義より  $\angle OAD$ ,  $\angle OAE$  は直角であるから、三角形 OAD, OAE は直角三角形である。また、線分 OA は球の半径であり、長さは 1 であるから、

$$\begin{aligned}
 AD &= OA \tan c = \tan c \\
 OD &= OA \sec c = \sec c \\
 AE &= OA \tan b = \tan b \\
 OE &= OA \sec b = \sec b
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

である。また、直角三角形の三平方の定理より、

$$\begin{aligned}
 OD^2 - AD^2 &= OA^2 = 1 \\
 OE^2 - AE^2 &= OA^2 = 1
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

である。次に、線分 DE を底辺とする2つの三角形 ODE, ADE を考える。これらの三角形

の底辺の対角は図 7 に示すように  $\angle DOE = a$ ,  $\angle DAE = A$  であるから, (平面の) 三角形の余弦定理より,

$$\begin{aligned} DE^2 &= OD^2 + OE^2 - 2OD \cdot OE \cos a \\ DE^2 &= AD^2 + AE^2 - 2AD \cdot AE \cos A \end{aligned} \quad (3)$$

の式が成り立つ. 上式の両式を辺々引くと,

$$0 = OD^2 - AD^2 + OE^2 - AE^2 - 2OD \cdot OE \cos a + 2AD \cdot AE \cos A \quad (4)$$

となる. 上式に式(2)を代入すると,

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + 1 - 2OD \cdot OE \cos a + 2AD \cdot AE \cos A \\ \therefore 1 - OD \cdot OE \cos a + AD \cdot AE \cos A &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

となる. さらに上式に式(1)を代入すると,

$$\begin{aligned} 1 - \sec c \cdot \sec b \cdot \cos a + \tan c \cdot \tan b \cdot \cos A &= 0 \\ \therefore 1 - \frac{\cos a}{\cos b \cdot \cos c} + \frac{\sin b \cdot \sin c}{\cos b \cdot \cos c} \cos A &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \quad (6)$$

となる. 球面三角形の 1 個の内角  $A$  と 3 辺  $a, b, c$  の間に成り立つ公式である. この公式は球面三角形の余弦定理 (cosine rule) と呼ばれる. 内角と辺の記号を順に入れ替えると, 以下の式も成り立つ.

$$\begin{aligned} \cos b &= \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos B \\ \cos c &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C \end{aligned} \quad (7)$$

図 7 では頂点  $A$  で球に接する平面を考えたが, 上式は頂点  $B, C$  が接点となる場合に相当する. 球面三角形については数多くの公式が知られているが, すべて上記の余弦定理から導くことができる.

#### 4. 正弦定理

余弦定理の式(6)を  $\cos A$  について解くと,

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \quad (8)$$

となる。上式から  $\sin A$  を求めると、

$$\begin{aligned} \sin^2 A &= 1 - \cos^2 A \\ &= 1 - \left( \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \right)^2 \\ &= \frac{\sin^2 b \cdot \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cdot \cos c)^2}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c} \\ &= \frac{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - (\cos a - \cos b \cdot \cos c)^2}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c} \\ &= \frac{\left( \begin{array}{l} 1 - \cos^2 b - \cos^2 c + \cos^2 b \cdot \cos^2 c \\ - \cos^2 a + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - \cos^2 b \cdot \cos^2 c \end{array} \right)}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c} \\ &= \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c} \\ \therefore \sin A &= \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}}{\sin b \cdot \sin c} \quad (9) \end{aligned}$$

となる。内角  $A$  は平面と平面の交角であり、その範囲は  $0 < A < \pi$  であるから、 $\sqrt{\quad}$  の符号は  $+$  をとる。上式の両辺を  $\sin a$  で割ると、

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}}{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin c} \quad (10)$$

となる。上式の右辺は 3 辺  $a, b, c$  に関して対称形であるから、左辺の記号 ( $A$  と  $a$ ) を ( $B$  と  $b$ )、( $C$  と  $c$ ) に変えても同じ式となる。つまり、

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \quad (11)$$

となる。球面三角形の内角  $A, B, C$  の正弦と対辺  $a, b, c$  の正弦の比の間に成り立つ公式である。この公式は球面三角形の正弦定理 (sine rule) と呼ばれる。

## 5. 余接定理

余弦定理の式(6)と式(7)を再掲する.

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \\ \cos c &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C\end{aligned}$$

この両式から  $\cos c$  を消去すると,

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b(\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C) + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \\ &= \cos a \cdot \cos^2 b + \cos b \cdot \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \\ \therefore \cos a(1 - \cos^2 b) &= \cos b \cdot \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \\ \therefore \cos a \cdot \sin^2 b &= \cos b \cdot \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A\end{aligned}\tag{12}$$

となる. 上式の両辺を  $\sin a \cdot \sin b$  で割ると,

$$\frac{\cos a \cdot \sin b}{\sin a} = \cos b \cdot \cos C + \frac{\sin c \cdot \cos A}{\sin a}\tag{13}$$

となる. ここで, 正弦定理の式(11)より,

$$\frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin A}\tag{14}$$

であるから, 式(13)の右辺の第2項に代入すると,

$$\cot a \cdot \sin b = \cos b \cdot \cos C + \sin C \cdot \cot A\tag{15}$$

となる. 球面三角形の2内角 (A, C) と2辺 (a, b) の間に成り立つ公式である. 左辺には辺の余接, 右辺には内角の余接が現れるため, 球面三角形の余接定理 (cotangent rule) とも呼ばれる. 内角と辺の記号を順に入れ替えると, 以下の式も成り立つ.

$$\begin{aligned}
\cot b \cdot \sin c &= \cos c \cdot \cos A + \sin A \cdot \cot B \\
\cot c \cdot \sin a &= \cos a \cdot \cos B + \sin B \cdot \cot C \\
\cot b \cdot \sin a &= \cos a \cdot \cos C + \sin C \cdot \cot B \\
\cot c \cdot \sin b &= \cos b \cdot \cos A + \sin A \cdot \cot C \\
\cot a \cdot \sin c &= \cos c \cdot \cos B + \sin B \cdot \cot A
\end{aligned} \tag{16}$$

## 6. 平面三角法との関係

以上の球面三角法の公式と平面の三角法の公式との関係を考える。球面三角形の内角  $A, B, C$  の大きさを維持した状態で、辺  $a, b, c$  の長さを球の半径（単位長さ 1）よりも小さくしていくと、球面三角形は平面三角形に近づいていく。そのとき、球面三角法の公式はどのように変化するかを調べる。

正弦関数と余弦関数をマクローリン級数に展開すると、

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots
\end{aligned} \tag{17}$$

と表される。ここで、変数  $x$  が微小な場合、3 次以上の項を微小項として無視すると、

$$\begin{aligned}
\sin x &= x \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} \\
\tan x &= x
\end{aligned} \tag{18}$$

となる。余弦定理の式(6)の辺  $a, b, c$  の正弦・余弦に上式を適用して、高次の項は微小項として無視すると、

$$\begin{aligned}
\cos a &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \\
\rightarrow 1 - \frac{1}{2}a^2 &= \left(1 - \frac{1}{2}b^2\right) \left(1 - \frac{1}{2}c^2\right) + bc \cos A \\
&= 1 - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}c^2 + bc \cos A \\
\therefore a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A
\end{aligned} \tag{19}$$



となり，平面三角形の余弦定理に帰着する．

正弦定理の式(11)の辺  $a, b, c$  の正弦に式(18)を適用すると，

$$\begin{aligned} \frac{\sin A}{\sin a} &= \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \\ \rightarrow \frac{\sin A}{a} &= \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \end{aligned} \quad (20)$$

となり，平面三角形の正弦定理に帰着する．

余接定理の式(15)の辺  $a, b$  の正接・余弦・余接に式(18)を適用して，高次の項は微小項として無視すると，

$$\begin{aligned} \cot a \cdot \sin b &= \cos b \cdot \cos C + \sin C \cdot \cot A \\ \rightarrow \frac{b - \frac{b^3}{3!}}{a + \frac{a^3}{3}} &= \left(1 - \frac{b^2}{2!}\right) \cos C + \frac{\sin C}{\tan A} \\ \therefore \frac{b}{a} &= \cos C + \frac{\sin C \cdot \cos A}{\sin A} = \frac{\sin A \cdot \cos C + \cos A \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{\sin(A+C)}{\sin A} \end{aligned} \quad (21)$$

となり，平面三角形の  $A + B + C = \pi$ （内角の和は2直角）の関係と正弦定理とに帰着する．

#### 関連文書

- 1) J. Hann, The Elements of Spherical Trigonometry, Virtue Brothers & Co., 1866 (revised and corrected by C. H. Dowling)
- 2) 数学ハンドブック編集委員会編, 理工学のための数学ハンドブック 第4版, 丸善, 1974