球面三角法

1. 球と大円

球（sphere）とは、中心からの距離，すなわち半径が一定の点の集合からなる立体である．球と交わる平面を考えると，球と平面の交線はつねに円（circle）である．特に，平面が球の中心を通る場合，その交線の円を大円（great circle）と言う．大円の半径は球の半径に等しい．球と 1 個の大円を図 1 に示す．1 個の大円は球を半球 S1, S2 に 2 分割する．

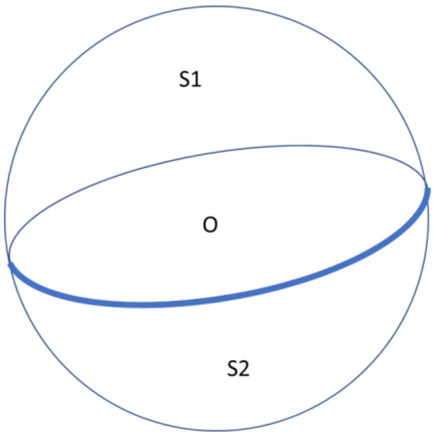

図 1 球と 1 個の大円

球と 2 個の大円を図 2 に示す．図中の直線は 2 平面の交線（球の直径）を示す．2 つの大円は球を舟形 S1, S2, S3, S4 の 4 個に分割する．

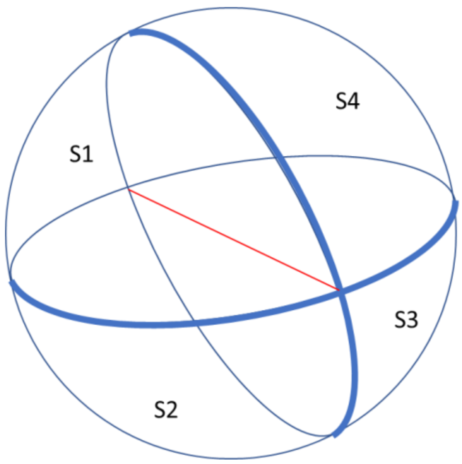

図 2 球と 2 個の大円

2. 球面三角形

球と 3 個の大円を図 3 に示す．図中の 3 本の直線は 3 平面の交線を示す．いずれも球の直径であるから，球の中心 O で交わる．3 個の大円は球を S1, S2, ～ S8 の 8 個に分割する．（S7 は S1 の反対側にあり，逆三角形状の部分である．）

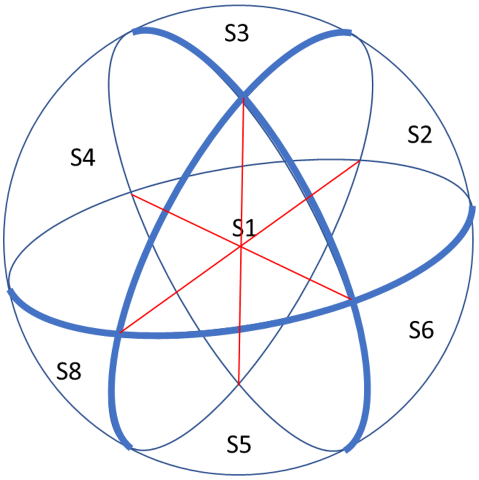

図 3 球と 3 個の大円

8 分割された球面の 1 個を図 4 に示す．この曲面は，3 個の頂点と，3 個の（円弧状の）辺を持ち，球面三角形（spherical triangle）と呼ばれる．また，球面三角形に関する数学を球面三角法（spherical trigonometry）と呼ぶ. 以下, 球面三角形の 3 個の頂点を A, B, C とし，頂点 A の対辺を a，頂点 B の対辺を b，頂点 C の対辺を c とする．

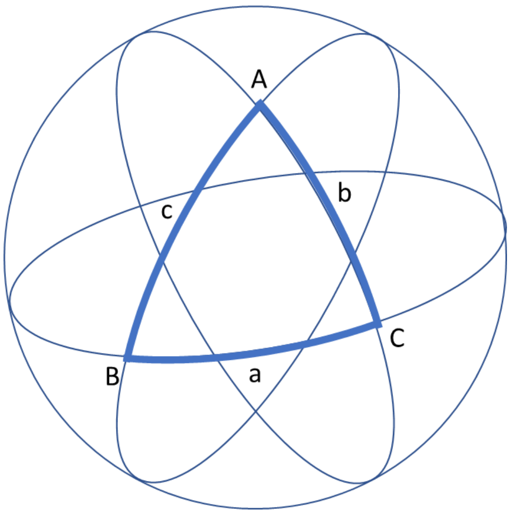

図 4 球面三角形

球の半径 OA の延長上から見た球面三角形を図 5 に示す．頂点 A の内角 A は，辺 b と辺 c が頂点 A でなす角度であり，辺 b を含む平面（A, C, O の 3 点を含む平面）と，辺 c を含む平面（A, B, O の 3 点を含む平面）の交角である．

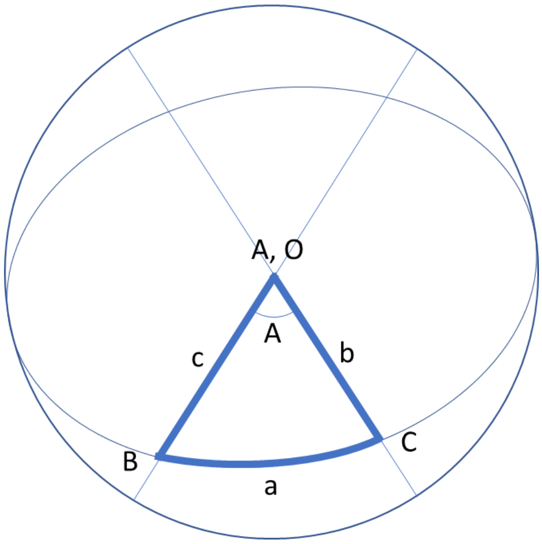

図 5 半径 OA から見た球面三角形

ここで，球の半径の長さを 1（単位長さ）と定義すると，円弧の長さは（半径)×(中心角）であるから，図 6 に示すように，辺 a の長さは中心角∠BOC に等しくなる．同様に，辺 b の長さは中心角∠COA に等しく，辺 c の長さは中心角∠AOB に等しい．

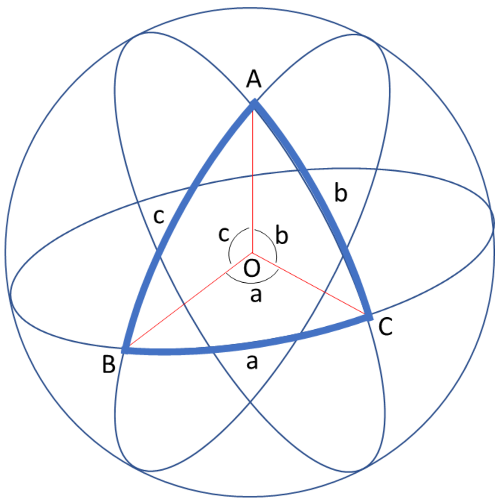

図 6 辺の長さと中心角

3. 余弦定理

球面上の 1 つの球面三角形（頂点 A, B, C）と球の中心 O がなす立体を図 7 に示す．扇形 BOC は半径 1 で中心角 a である．同様に，扇形 COA は半径 1 で中心角 b であり，扇形 AOB は半径 1 で中心角 c である．ここで，頂点 A で球に接する平面を考える．半径 OB の延長線と（頂点 A の）接平面との交点を D とする．同様に，半径 OC の延長線と（頂点 A の）接平面との交点を E する．

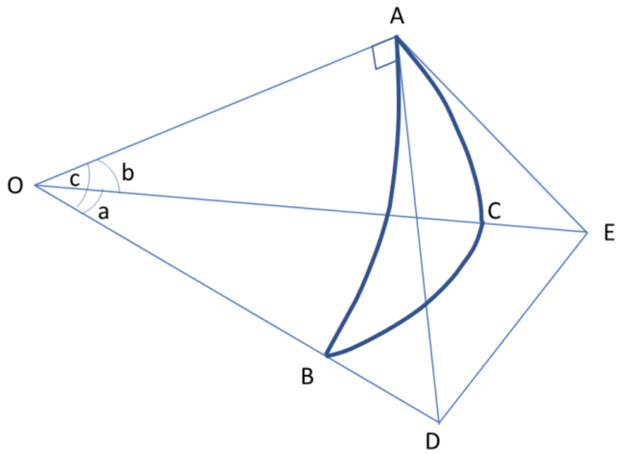

図 7 球面三角形と中心

接平面上の 3 点 A, D, E を結ぶと（平面の）三角形が得られる．その三角形の∠DAE は頂点 A の内角 A に等しい．また，接平面の定義より∠OAD, ∠OAE は直角であるから，三角形 OAD, OAE は直角三角形である．また，線分 OA は球の半径であり，長さは 1 であるから，

$$
\begin{aligned}
AD &= OA\tan c = \tan c \\
OD &= OA\sec c = \sec c \\
AE &= OA\tan b = \tan b \\
OE &= OA\sec b = \sec b
\end{aligned}
\tag{1}
$$

である．また，直角三角形の三平方の定理より，

$$
\begin{aligned}
OD^2 - AD^2 &= OA^2 = 1 \\
OE^2 - AE^2 &= OA^2 = 1
\end{aligned}
\tag{2}
$$

である．次に，線分 DE を底辺とする 2 つの三角形 ODE, ADE を考える．これらの三角形

の底辺の対角は図 7 に示すように∠DOE＝a，∠DAE＝A であるから，（平面の）三角形の余弦定理より，

$$\begin{aligned} DE^2 &= OD^2 + OE^2 - 2OD \cdot OE \cos a \\ DE^2 &= AD^2 + AE^2 - 2AD \cdot AE \cos A \end{aligned} \tag{3}$$

の式が成り立つ．上式の両式を辺々引くと，

$$0 = OD^2 - AD^2 + OE^2 - AE^2 - 2OD \cdot OE \cos a + 2AD \cdot AE \cos A \tag{4}$$

となる．上式に式(2)を代入すると，

$$\begin{aligned} &0 = 1 + 1 - 2OD \cdot OE \cos a + 2AD \cdot AE \cos A \\ &\therefore 1 - OD \cdot OE \cos a + AD \cdot AE \cos A = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

となる．さらに上式に式(1)を代入すると，

$$1 - \sec c \cdot \sec b \cdot \cos a + \tan c \cdot \tan b \cdot \cos A = 0$$

$$\therefore 1 - \frac{\cos a}{\cos b \cdot \cos c} + \frac{\sin b \cdot \sin c}{\cos b \cdot \cos c} \cos A = 0$$

$$\therefore \cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \tag{6}$$

となる．球面三角形の 1 個の内角 A と 3 辺 a, b, c の間に成り立つ公式である．この公式は球面三角形の余弦定理（cosine rule）と呼ばれる．内角と辺の記号を順に入れ替えると，以下の式も成り立つ．

$$\begin{aligned} \cos b &= \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos B \\ \cos c &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C \end{aligned} \tag{7}$$

図 7 では頂点 A で球に接する平面を考えたが，上式は頂点 B, C が接点となる場合に相当する．球面三角形については数多くの公式が知られているが，すべて上記の余弦定理から導くことができる．

4.　正弦定理

余弦定理の式(6)を cos A について解くと，

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \tag{8}$$

となる．上式から sin A を求めると，

$$\begin{aligned}
\sin^2 A &= 1 - \cos^2 A \\
&= 1 - \left(\frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \right)^2 \\
&= \frac{\sin^2 b \cdot \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cdot \cos c)^2}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c} \\
&= \frac{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - (\cos a - \cos b \cdot \cos c)^2}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c} \\
&= \frac{\left(\begin{array}{l} 1 - \cos^2 b - \cos^2 c + \cos^2 b \cdot \cos^2 c \\ \quad - \cos^2 a + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - \cos^2 b \cdot \cos^2 c \end{array} \right)}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c} \\
&= \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c}
\end{aligned}$$

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}}{\sin b \cdot \sin c} \tag{9}$$

となる．内角 A は平面と平面の交角であり，その範囲は $0 < \mathrm{A} < \pi$ であるから，$\sqrt{\ }$ の符号は＋をとる．上式の両辺を sin a で割ると，

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}}{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin c} \tag{10}$$

となる．上式の右辺は 3 辺 a, b, c に関して対称形であるから，左辺の記号（A と a）を（B と b)，（C と c）に変えても同じ式となる．つまり，

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \tag{11}$$

となる．球面三角形の内角 A, B, C の正弦と対辺 a, b, c の正弦の比の間に成り立つ公式である．この公式は球面三角形の正弦定理（sine rule）と呼ばれる．

5．余接定理

余弦定理の式(6)と式(7)を再掲する．

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$
$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C$$

この両式から cos c を消去すると，

$$\begin{aligned}
&\cos a = \cos b\left(\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C\right) + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \\
&\quad = \cos a \cdot \cos^2 b + \cos b \cdot \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \\
&\therefore \cos a\left(1 - \cos^2 b\right) = \cos b \cdot \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \\
&\therefore \cos a \cdot \sin^2 b = \cos b \cdot \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \qquad (12)
\end{aligned}$$

となる．上式の両辺を sin a･sin b で割ると，

$$\frac{\cos a \cdot \sin b}{\sin a} = \cos b \cdot \cos C + \frac{\sin c \cdot \cos A}{\sin a} \qquad (13)$$

となる．ここで，正弦定理の式(11)より，

$$\frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin A} \qquad (14)$$

であるから，式(13)の右辺の第 2 項に代入すると，

$$\cot a \cdot \sin b = \cos b \cdot \cos C + \sin C \cdot \cot A \qquad (15)$$

となる．球面三角形の 2 内角（A, C）と 2 辺（a, b）の間に成り立つ公式である．左辺には辺の余接，右辺には内角の余接が現れるため，球面三角形の余接定理（cotangent rule）とも呼ばれる．内角と辺の記号を順に入れ替えると，以下の式も成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&\cot b \cdot \sin c = \cos c \cdot \cos A + \sin A \cdot \cot B \\
&\cot c \cdot \sin a = \cos a \cdot \cos B + \sin B \cdot \cot C \\
&\cot b \cdot \sin a = \cos a \cdot \cos C + \sin C \cdot \cot B \\
&\cot c \cdot \sin b = \cos b \cdot \cos A + \sin A \cdot \cot C \\
&\cot a \cdot \sin c = \cos c \cdot \cos B + \sin B \cdot \cot A
\end{aligned}
\tag{16}
$$

6．平面三角法との関係

以上の球面三角法の公式と平面の三角法の公式との関係を考える．球面三角形の内角 A, B, C の大きさを維持した状態で、辺 a, b, c の長さを球の半径（単位長さ 1）よりも小さくしていくと，球面三角形は平面三角形に近づいていく．そのとき，球面三角法の公式はどのように変化するかを調べる．

正弦関数と余弦関数をマクローリン級数に展開すると，

$$
\begin{aligned}
&\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \\
&\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \\
&\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots
\end{aligned}
\tag{17}
$$

と表される．ここで，変数 x が微小な場合，3 次以上の項を微小項として無視すると，

$$
\begin{aligned}
&\sin x = x \\
&\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} \\
&\tan x = x
\end{aligned}
\tag{18}
$$

となる．余弦定理の式(6)の辺 a, b, c の正弦・余弦に上式を適用して，高次の項は微小項として無視すると，

$$
\begin{aligned}
&\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \\
&\rightarrow \quad 1 - \frac{1}{2}a^2 = \left(1 - \frac{1}{2}b^2\right)\left(1 - \frac{1}{2}c^2\right) + bc\cos A \\
&\qquad = 1 - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}c^2 + bc\cos A \\
&\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A
\end{aligned}
\tag{19}
$$

となり，平面三角形の余弦定理に帰着する．

正弦定理の式(11)の辺 a, b, c の正弦に式(18)を適用すると，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}\\
&\rightarrow \quad \frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

となり，平面三角形の正弦定理に帰着する．

余接定理の式(15)の辺 a, b の正接・余弦・余接に式(18)を適用して，高次の項は微小項として無視すると，

$$
\begin{aligned}
&\cot a\cdot\sin b=\cos b\cdot\cos C+\sin C\cdot\cot A\\
&\rightarrow \quad \frac{b-\dfrac{b^3}{3!}}{a+\dfrac{a^3}{3}}=\left(1-\frac{b^2}{2!}\right)\cos C+\frac{\sin C}{\tan A}\\
&\therefore \frac{b}{a}=\cos C+\frac{\sin C\cdot\cos A}{\sin A}=\frac{\sin A\cdot\cos C+\cos A\cdot\sin C}{\sin A}=\frac{\sin\left(A+C\right)}{\sin A}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

となり，平面三角形の A + B + C = π （内角の和は 2 直角）の関係と正弦定理とに帰着する．

<u>関連文書</u>

1） J. Hann, The Elements of Spherical Trigonometry, Virtue Brothers & Co., 1866（revised and corrected by C. H. Dowling）

2） 数学ハンドブック編集委員会編，理工学のための数学ハンドブック 第 4 版，丸善，1974