

7 カルマンフィルタ

カルマンフィルタには離散過程のカルマンフィルタと連続過程のカルマンフィルタの2種類がある。本書では、慣性計測装置に広く使われている離散過程のカルマンフィルタを扱う。

7.1 カルマンフィルタのアルゴリズム

カルマンフィルタはシステム方程式 (system equation) と観測方程式 (observation equation) の二つの方程式が基礎となる。カルマンフィルタのアルゴリズムは時間更新 (time update) と観測更新 (observation update) の2種類の更新から構成される。それらの公式を表7.1にまとめる。なお、カルマンフィルタのカルマンとは、ハンガリー生まれの米国の科学者 R. E. Kalman (1930 – 2016) である。

表 7.1 カルマンフィルタ

システム方程式	$\mathbf{x}_k = \Phi_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \Gamma_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}, \quad \mathbf{w}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k)$	式 (7.14)
観測方程式	$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k)$	式 (7.21)
時間更新	$\mathbf{x}_{k(-)} = \Phi_{k-1}\mathbf{x}_{k-1(+)}$ $\mathbf{P}_{k(-)} = \Phi_{k-1}\mathbf{P}_{k-1(+)}\Phi_{k-1}^T + \Gamma_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}\Gamma_{k-1}^T$	式 (7.15) 式 (7.20)
観測更新	$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k(-)}\mathbf{H}_k^T(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k(-)}\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$ $\mathbf{x}_{k(+)} = \mathbf{x}_{k(-)} + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{x}_{k(-)})$ $\mathbf{P}_{k(+)} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)\mathbf{P}_{k(-)}$	式 (7.39) 式 (7.38) 式 (7.40)

カルマンフィルタの更新のタイミングを図7.1に示す。

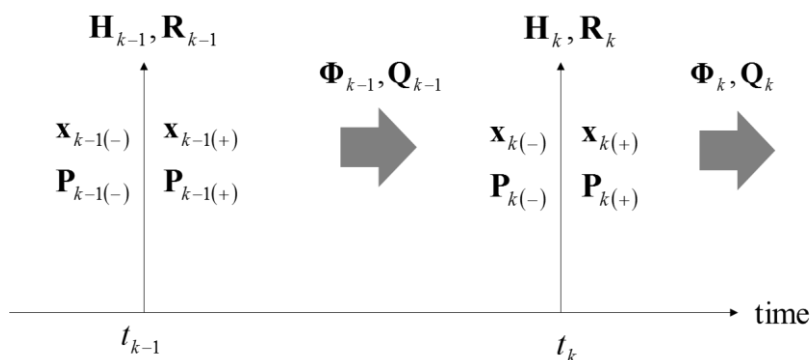


図 7.1 カルマンフィルタのタイミング

離散時刻 t_{k-1} から t_k への更新を時間更新と言う。添え字 k は離散時刻の番号を示す。それぞれの離散時刻において観測更新を直ちに行う。観測更新の前を添え字 (-) で、観測更新の後を添え字 (+) で示す。したがって、カルマンフィルタ全体での更新の順序は、

$$\dots \rightarrow k-1(-) \rightarrow k-1(+) \rightarrow k(-) \rightarrow k(+) \rightarrow k+1(-) \rightarrow \dots$$

となる。ただし、図 7.1 では時間更新と観測更新を交互に行っているが、観測の周期が長い（観測のサイクル数が小さい）場合や、観測値が得られなかった場合には、時間更新を連続して行う。以下、表 7.1 に示した公式の詳細について記す。

7.2 システム方程式

システム方程式が次の微分方程式で表されるものとする。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{w}(t) \tag{7.1}$$

ここに、 \mathbf{x} はシステムの状態を表すベクトル変数であり、状態変数と言う。 $\mathbf{w}(t)$ はホワイトノイズ入力であり、システムノイズと言う。行列 \mathbf{A} は係数行列、行列 \mathbf{B} はシステムノイズの換算行列である。行列 \mathbf{A}, \mathbf{B} の要素は、定数の場合もあれば、変数の場合もある。状態変数 \mathbf{x} の行数を n 行、システムノイズ \mathbf{w} の行数を m 行とすると、行列 \mathbf{A} は n 行 n 列の正方行列、行列 \mathbf{B} は n 行 m 列の行列となる。システムノイズ $\mathbf{w}(t)$ は平均値ベクトルが $\mathbf{0}$ 、共分散行列が $\mathbf{Q}(t)$ の正規分布に従うものとする。共分散行列 $\mathbf{Q}(t)$ は m 行 m 列の正方行列であり、システムノイズ $\mathbf{w}(t)$ の要素同士に相関が無ければ、対角行列となる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{w}(t) &\sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}(t)) \\ \langle \mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t+\tau) \rangle &= \mathbf{Q}(t)\delta(\tau) \end{aligned} \right\} \tag{7.2}$$

第 6 章に記したマルコフノイズのシステム方程式は、式 (6.22) より、

$$\dot{x}(t) = -\beta x(t) + w(t)$$

であった。これはスカラーの式であるが、式 (7.1) と同じ形式である。マルコフノイズのシステム方程式の解は、式 (6.29) より、

$$x(t) = e^{-\beta t} x(0) + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} w(\tau) d\tau$$

であった。この式と同様に、式 (7.1) の解は、

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t)(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t)(t-\tau)} \mathbf{B}(\tau) \mathbf{w}(\tau) d\tau \quad (7.3)$$

となる。ここに、係数 $-\beta$ が係数行列 $\mathbf{A}(t)$ に、システムノイズ $w(\tau)$ が行列 $\mathbf{B}(\tau) \mathbf{w}(\tau)$ に、積分の開始時刻が $t=0$ から $t=t_0$ に置き換わっている。ここで、式 (7.3) の中の指数関数を、

$$\Phi(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t)(t-t_0)} \quad (7.4)$$

と記すことにする。この行列 Φ は n 行 n 列の正方行列であり、推移行列 (transition matrix), または状態推移行列と言う。この推移行列 Φ を使うと、式 (7.3) は、

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{w}(\tau) d\tau \quad (7.5)$$

となる。連続時間のシステム方程式が求められた。

推移行列 Φ を求める。スカラーの指数関数は展開すると、

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} x^n + \cdots \\ e^{at} &= 1 + at + \frac{1}{2!} a^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{n!} a^n t^n + \cdots \end{aligned} \quad (7.6)$$

である。定数行列 \mathbf{A} を指数とする指数関数も同様に、

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \mathbf{A}^n t^n + \cdots \quad (7.7)$$

である。ここに、 \mathbf{I} は n 行 n 列の単位行列である。式 (7.4) に代入すると、

$$\Phi(t, t_0) = \mathbf{I} + \mathbf{A}(t-t_0) + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2(t-t_0)^2 + \dots \quad (7.8)$$

となる。この式は行列 \mathbf{A} が定数行列の場合の式であるが、時間間隔 $t-t_0$ における $\mathbf{A}(t)$ の変化が小さければ、

$$\Phi(t, t_0) = \mathbf{I} + \mathbf{A}(t)(t-t_0) + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2(t)(t-t_0)^2 + \dots \quad (7.9)$$

と近似できる。

システム方程式 (7.5) を離散化する。時刻 t_0 を t_{k-1} 、時刻 t を t_k 、時間 $t-t_0$ を Δt とすると、式 (7.9) を離散化した推移行列 Φ_k は、

$$\Phi_k = \mathbf{I} + \mathbf{A}_k \Delta t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}_k^2 \Delta t^2 + \dots \quad (7.10)$$

となる。時間 Δt が十分に小さい場合は、2次以上の高次の項を無視して、

$$\Phi_k = \mathbf{I} + \mathbf{A}_k \Delta t \quad (7.11)$$

となる。式 (7.5) の第2項は、式 (7.10) を代入して、2次以上の高次の項を無視すると、

$$\begin{aligned} & \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{w}(\tau) d\tau \\ &= \Phi_{k-1} \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1} \Delta t \\ &= \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}_{k-1} \Delta t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}_{k-1}^2 \Delta t^2 + \dots \right) \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1} \Delta t \\ &= \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1} \Delta t = \Gamma_{k-1} \mathbf{w}_{k-1} \end{aligned} \quad (7.12)$$

となる。ここに、

$$\Gamma_k = \Delta t \mathbf{B}_k \quad (7.13)$$

である。以上より、離散化されたシステム方程式は、

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \mathbf{w}_{k-1} \quad (7.14)$$

となる。

7.3 時間更新

時間更新における状態変数 \mathbf{x} の期待値は、式 (7.14) とホワイトノイズの関係 $\langle \mathbf{w}_k \rangle = \mathbf{0}$ より、

$$\hat{\mathbf{x}}_{k(-)} = \Phi_{k-1} \mathbf{x}_{k-1(+)} \quad (7.15)$$

となる。ここで、2種類の状態変数の誤差を、

$$\left. \begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_{k(-)} - \mathbf{x}_{k(-)} \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k &= \tilde{\mathbf{x}}_{k(+)} - \mathbf{x}_{k(+)} \end{aligned} \right\} \quad (7.16)$$

と定義する。 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$ は時間更新における誤差、 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$ は観測更新における誤差である。 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$ の式に式 (7.14) と式 (7.15) を代入すると、

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k &= \Phi_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1(+)} - (\Phi_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}) \\ &= \Phi_{k-1} (\hat{\mathbf{x}}_{k-1(+)} - \mathbf{x}_{k-1}) - \Gamma_{k-1} \mathbf{w}_{k-1} \\ &= \Phi_{k-1} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k-1} - \Gamma_{k-1} \mathbf{w}_{k-1} \end{aligned} \quad (7.17)$$

となる。この式を使うと、時間更新における共分散行列 \mathbf{P} の期待値は、

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}_k \rangle &= \langle \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^T \rangle \\ &= \langle (\Phi_{k-1} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k-1} - \Gamma_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}) (\Phi_{k-1} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k-1} - \Gamma_{k-1} \mathbf{w}_{k-1})^T \rangle \\ &= \left\langle \begin{array}{l} \Phi_{k-1} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k-1} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k-1}^T \Phi_{k-1}^T - \Gamma_{k-1} \mathbf{w}_{k-1} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k-1}^T \Phi_{k-1}^T \\ - \Phi_{k-1} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}^T \Gamma_{k-1}^T + \Gamma_{k-1} \mathbf{w}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}^T \Gamma_{k-1}^T \end{array} \right\rangle \\ &= \Phi_{k-1} \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k-1} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k-1}^T \rangle \Phi_{k-1}^T - \Gamma_{k-1} \langle \mathbf{w}_{k-1} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k-1}^T \rangle \Phi_{k-1}^T \\ &\quad - \Phi_{k-1} \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}^T \rangle \Gamma_{k-1}^T + \Gamma_{k-1} \langle \mathbf{w}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}^T \rangle \Gamma_{k-1}^T \end{aligned} \quad (7.18)$$

となり、4項の和となる。ここで、第1項の期待値は時間更新前の共分散行列である。第

2項と第3項の期待値は、時間更新のノイズ \mathbf{w}_{k-1} と観測更新の誤差 $\tilde{\mathbf{e}}_{k-1}$ は相関が無いとして、ともに $\mathbf{0}$ である。第4項の中の期待値はシステムノイズの共分散行列であり、

$$\mathbf{Q}_k = \langle \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T \rangle \quad (7.19)$$

と定義する。以上より、共分散行列の式 (7.18) は、

$$\mathbf{P}_{k(-)} = \Phi_{k-1} \mathbf{P}_{k-1(+)} \Phi_{k-1}^T + \Gamma_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k-1}^T \quad (7.20)$$

となる。

7.4 観測方程式

観測方程式が次の式で表されるものとする。

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (7.21)$$

ここに、 \mathbf{z}_k は観測値、 \mathbf{H}_k は観測行列、 \mathbf{x}_k は状態変数である。 \mathbf{v}_k は観測ノイズであり、ホワイトノイズとする。状態変数 \mathbf{x}_k を n 行のベクトルとし、観測値 \mathbf{z}_k と観測ノイズ \mathbf{v}_k を l 行のベクトルとすると、観測行列 \mathbf{H}_k は l 行 n 列の行列となる。

観測ノイズ \mathbf{v}_k は平均値ベクトルが $\mathbf{0}$ 、共分散行列が \mathbf{R}_k の正規分布に従うものとする。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_k &\sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k) \\ \langle \mathbf{v}_k \mathbf{v}_j^T \rangle &= \mathbf{R}_k \Delta(k-j) \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

ここに、共分散行列 \mathbf{R}_k は l 行 l 列の正方行列であり、観測ノイズ $\mathbf{v}_k(t)$ の要素同士に相関が無い場合は対角行列となる。記号 $\Delta(k-j)$ は離散化されたデルタ関数であり、 $k=j$ のとき 1、 $k \neq j$ のとき 0 である。

7.5 観測更新

観測更新はカルマンフィルタの核心である。本書では、文献 11 による直観的な方法を使って導く。確率論のベイズの公式に基づく証明は文献 1 がくわしく、わかりやすい。

観測直前における状態変数を \mathbf{x}_1 とし、観測によって得られた観測値に対応する状態変数を \mathbf{x}_2 とする。この二つの状態変数 \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 から推定される推定値を $\hat{\mathbf{x}}$ が、次の式に示すように表されるものとする。

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{I} - \mathbf{W})\mathbf{x}_1 + \mathbf{W}\mathbf{x}_2 \\ &= \mathbf{x}_1 + \mathbf{W}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\end{aligned}\quad (7.23)$$

ここに、状態変数 \mathbf{x} を n 行のベクトルとすると、 \mathbf{I} と \mathbf{W} はともに n 行 n 列の正方行列であり、 \mathbf{I} は単位行列、 \mathbf{W} は観測更新の重みを表す行列である。もし重み行列 $\mathbf{W} = \mathbf{I}$ であれば $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_2$ となり、重み行列 $\mathbf{W} = \mathbf{0}$ であれば $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_1$ となる。この重み行列 \mathbf{W} はこの段階では未定である。ここで、観測値 \mathbf{y} と状態変数 \mathbf{x} との間には、次の観測方程式が成り立つものとする。

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{H}\mathbf{x}_2 \quad (7.24)$$

ここに、行列 \mathbf{H} は観測行列である。さらに、重み行列 \mathbf{W} が、観測行列 \mathbf{H} を使って、

$$\mathbf{W} = \mathbf{K}\mathbf{H} \quad (7.25)$$

と表されるものとする。重み行列 \mathbf{W} は未定であるから、新たな行列 \mathbf{K} も未定である。この式を式 (7.23) に代入すると、

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{x}_1 + \mathbf{K}\mathbf{H}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \\ &= \mathbf{x}_1 + \mathbf{K}(\mathbf{H}\mathbf{x}_2 - \mathbf{H}\mathbf{x}_1)\end{aligned}\quad (7.26)$$

となる。この式に式 (7.24) を代入して \mathbf{x}_2 を消去すると、

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{x}_1 + \mathbf{K}(\mathbf{y}_2 - \mathbf{H}\mathbf{x}_1) \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{x}_1 + \mathbf{K}\mathbf{y}_2\end{aligned}\quad (7.27)$$

となる。ここで、両辺の期待値をとると、

$$\langle \hat{\mathbf{x}} \rangle = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})\langle \mathbf{x}_1 \rangle + \mathbf{K}\langle \mathbf{y}_2 \rangle \quad (7.28)$$

となる。式 (7.27) と式 (7.28) の差をとると、

$$\hat{\mathbf{x}} - \langle \hat{\mathbf{x}} \rangle = (\mathbf{I} - \mathbf{KH})(\mathbf{x}_1 - \langle \mathbf{x}_1 \rangle) + \mathbf{K}(\mathbf{y}_2 - \langle \mathbf{y}_2 \rangle) \quad (7.29)$$

となる。この状態変数の偏差の共分散行列 \mathbf{P} は、

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= (\hat{\mathbf{x}} - \langle \hat{\mathbf{x}} \rangle)(\hat{\mathbf{x}} - \langle \hat{\mathbf{x}} \rangle)^T \\ &= ((\mathbf{I} - \mathbf{KH})(\mathbf{x}_1 - \langle \mathbf{x}_1 \rangle) + \mathbf{K}(\mathbf{y}_2 - \langle \mathbf{y}_2 \rangle))((\mathbf{I} - \mathbf{KH})(\mathbf{x}_1 - \langle \mathbf{x}_1 \rangle) + \mathbf{K}(\mathbf{y}_2 - \langle \mathbf{y}_2 \rangle))^T \\ &= ((\mathbf{I} - \mathbf{KH})(\mathbf{x}_1 - \langle \mathbf{x}_1 \rangle) + \mathbf{K}(\mathbf{y}_2 - \langle \mathbf{y}_2 \rangle))(\mathbf{x}_1 - \langle \mathbf{x}_1 \rangle)^T (\mathbf{I} - \mathbf{KH})^T + (\mathbf{y}_2 - \langle \mathbf{y}_2 \rangle)^T \mathbf{K}^T \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{KH}) \langle (\mathbf{x}_1 - \langle \mathbf{x}_1 \rangle)(\mathbf{x}_1 - \langle \mathbf{x}_1 \rangle)^T \rangle (\mathbf{I} - \mathbf{KH})^T \\ &\quad + (\mathbf{I} - \mathbf{KH}) \langle (\mathbf{x}_1 - \langle \mathbf{x}_1 \rangle)(\mathbf{y}_2 - \langle \mathbf{y}_2 \rangle)^T \rangle \mathbf{K}^T \\ &\quad + \mathbf{K} \langle (\mathbf{y}_2 - \langle \mathbf{y}_2 \rangle)(\mathbf{x}_1 - \langle \mathbf{x}_1 \rangle)^T \rangle (\mathbf{I} - \mathbf{KH})^T \\ &\quad + \mathbf{K} \langle (\mathbf{y}_2 - \langle \mathbf{y}_2 \rangle)(\mathbf{y}_2 - \langle \mathbf{y}_2 \rangle)^T \rangle \mathbf{K}^T \end{aligned} \quad (7.30)$$

となり、4項の和となる。ここで、次の式に示すように、観測更新前における状態変数 \mathbf{x}_1 の偏差の共分散行列を \mathbf{P}_1 とする。状態変数の偏差と観測値の偏差とは相関が無く、その共分散行列は $\mathbf{0}$ とする。観測値 \mathbf{y} の偏差の共分散行列を \mathbf{R} とする。

$$\left. \begin{aligned} \langle (\mathbf{x}_1 - \langle \mathbf{x}_1 \rangle)(\mathbf{x}_1 - \langle \mathbf{x}_1 \rangle)^T \rangle &= \mathbf{P}_1 \\ \langle (\mathbf{x}_1 - \langle \mathbf{x}_1 \rangle)(\mathbf{y}_2 - \langle \mathbf{y}_2 \rangle)^T \rangle &= \mathbf{0} \\ \langle (\mathbf{y}_2 - \langle \mathbf{y}_2 \rangle)(\mathbf{x}_1 - \langle \mathbf{x}_1 \rangle)^T \rangle &= \mathbf{0} \\ \langle (\mathbf{y}_2 - \langle \mathbf{y}_2 \rangle)(\mathbf{y}_2 - \langle \mathbf{y}_2 \rangle)^T \rangle &= \mathbf{R} \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

これらの式を式 (7.30) に代入すると、

$$\mathbf{P} = (\mathbf{I} - \mathbf{KH})\mathbf{P}_1(\mathbf{I} - \mathbf{KH})^T + \mathbf{KRK}^T \quad (7.32)$$

となる。展開すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= (\mathbf{I} - \mathbf{KH})\mathbf{P}_1(\mathbf{I} - \mathbf{H}^T \mathbf{K}^T) + \mathbf{KRK}^T \\ &= \mathbf{P}_1 - \mathbf{KHP}_1 - \mathbf{P}_1 \mathbf{H}^T \mathbf{K}^T + \mathbf{KHP}_1 \mathbf{H}^T \mathbf{K}^T + \mathbf{KRK}^T \end{aligned} \quad (7.33)$$

となる。共分散行列 \mathbf{P} の対角線上には状態変数の偏差の二乗（正值）が並んでいる。それらの対角要素の和、すなわち共分散行列 \mathbf{P} のトレース $\text{Tr}(\mathbf{P})$ を最小化する未定行列 \mathbf{K} を

求める。そのため、トレース $\text{Tr}(\mathbf{P})$ を行列 \mathbf{K} で微分して $\mathbf{0}$ とする。

$$\frac{d}{d\mathbf{A}} \text{Tr}(\mathbf{P}) = \mathbf{0} \quad (7.34)$$

この式に式 (7.33) を代入して、2.11 節に記したトレースに関する公式；

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathbf{AB}) &= \text{Tr}(\mathbf{A}) + \text{Tr}(\mathbf{B}) \\ \frac{d}{d\mathbf{A}} \text{Tr}(\mathbf{AB}) &= \mathbf{B}^T, \quad \frac{d}{d\mathbf{A}} \text{Tr}(\mathbf{BA}^T) = \mathbf{B} \\ \frac{d}{d\mathbf{A}} \text{Tr}(\mathbf{ABA}^T) &= \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{B}^T) \end{aligned}$$

を使うと、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mathbf{A}} \text{Tr}(\mathbf{P}) &= \frac{d}{d\mathbf{A}} \left(\text{Tr}(\mathbf{P}_1) - \text{Tr}(\mathbf{KHP}_1) - \text{Tr}(\mathbf{P}_1\mathbf{H}^T\mathbf{K}^T) + \text{Tr}(\mathbf{KHP}_1\mathbf{H}^T\mathbf{K}^T) + \text{Tr}(\mathbf{KRK}^T) \right) \\ &= -(\mathbf{HP}_1)^T - \mathbf{P}_1\mathbf{H}^T + \mathbf{K} \left(\mathbf{HP}_1\mathbf{H}^T + (\mathbf{HP}_1\mathbf{H}^T)^T \right) + \mathbf{K}(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) \\ &= -\mathbf{P}_1^T\mathbf{H}^T - \mathbf{P}_1\mathbf{H}^T + \mathbf{K}(\mathbf{HP}_1\mathbf{H}^T + \mathbf{HP}_1^T\mathbf{H}^T) + \mathbf{K}(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7.35)$$

となる。ここで、共分散行列 \mathbf{P} , \mathbf{R} はともに転置しても変わらない行列、すなわち対称行列であるから、

$$\mathbf{P}_1^T = \mathbf{P}_1, \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}^T$$

である。よって、式 (7.35) は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mathbf{A}} \text{Tr}(\mathbf{P}) &= -2\mathbf{P}_1\mathbf{H}^T + 2\mathbf{KHP}_1\mathbf{H}^T + 2\mathbf{KR} = \mathbf{0} \\ \therefore \mathbf{K}(\mathbf{HP}_1\mathbf{H}^T + \mathbf{R}) &= \mathbf{P}_1\mathbf{H}^T \\ \therefore \mathbf{K} &= \mathbf{P}_1\mathbf{H}^T(\mathbf{HP}_1\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \end{aligned} \quad (7.36)$$

となり、未定の行列 \mathbf{K} が定まった。この行列 \mathbf{K} をカルマンゲイン (Kalman gain) と言う。この行列 \mathbf{K} を共分散行列 \mathbf{P} の式 (7.33) に代入すると、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P} &= \mathbf{P}_1 - \mathbf{KHP}_1 - \mathbf{P}_1\mathbf{H}^T\mathbf{K}^T + \mathbf{K}(\mathbf{HP}_1\mathbf{H}^T + \mathbf{R})\mathbf{K}^T \\
 &= \mathbf{P}_1 - \mathbf{KHP}_1 - \mathbf{P}_1\mathbf{H}^T\mathbf{K}^T + \mathbf{P}_1\mathbf{H}^T(\mathbf{HP}_1\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}(\mathbf{HP}_1\mathbf{H}^T + \mathbf{R})\mathbf{K}^T \\
 &= \mathbf{P}_1 - \mathbf{KHP}_1 - \mathbf{P}_1\mathbf{H}^T\mathbf{K}^T + \mathbf{P}_1\mathbf{H}^T\mathbf{K}^T \\
 &= \mathbf{P}_1 - \mathbf{KHP}_1 \\
 &= (\mathbf{I} - \mathbf{KH})\mathbf{P}_1
 \end{aligned} \tag{7.37}$$

となる。式 (7.27), 式 (7.36), 式 (7.37) の添え字を書き改めると,

$$\mathbf{x}_{k(+)} = \mathbf{x}_{k(-)} + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{x}_{k(-)}) \tag{7.38}$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k(-)}\mathbf{H}_k^T(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k(-)}\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \tag{7.39}$$

$$\mathbf{P}_{k(+)} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)\mathbf{P}_{k(-)} \tag{7.40}$$

となる。

7.6 拡張カルマンフィルタのアルゴリズム

現実の技術的課題のシステム方程式や観測方程式の多くは線形方程式ではなく、非線形方程式である。非線形のシステム方程式や観測方程式にも適用できるように拡張したカルマンフィルタ、すなわち拡張カルマンフィルタ (extended Kalman filter, EKF) のまとめを表 7.2 に示す。

表 7.2 拡張カルマンフィルタ

システム方程式	$\delta\mathbf{x}_k = \Phi_{k-1}\delta\mathbf{x}_{k-1} + \Gamma_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}, \quad \mathbf{w}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k)$	式 (7.41)
観測方程式	$\delta\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k\delta\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k)$	式 (7.42)
時間更新	$\delta\mathbf{x}_{k(-)} = \mathbf{0}$	式 (7.43)
	$\mathbf{P}_{k(-)} = \Phi_{k-1}\mathbf{P}_{k-1(+)}\Phi_{k-1}^T + \Gamma_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}\Gamma_{k-1}^T$	式 (7.44)
観測更新	$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k(-)}\mathbf{H}_k^T(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k(-)}\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$	式 (7.45)
	$\delta\mathbf{x}_{k(+)} = \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}(\mathbf{x}_{k(-)}))$	式 (7.46)
	$\mathbf{P}_{k(+)} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)\mathbf{P}_{k(-)}$	式 (7.47)

カルマンフィルタの表 7.1 と比較すると、状態変数 \mathbf{x} を状態変数の誤差 $\delta\mathbf{x}$ に、観測値 \mathbf{z} を観測値の誤差 $\delta\mathbf{z}$ に置き換えたものになっている。式 (7.44), 式 (7.45), 式 (7.47) の 3

式は変わらない。状態変数の時間更新の式は、 $\delta\mathbf{x}_{k(-)} = \Phi_{k-1}\delta\mathbf{x}_{k-1(+)}$ となるが、その時間更新の直前まで最も確からしい（最尤の）観測更新を行っているとの前提から、式 (7.43) となる。状態変数の観測更新の式は、 $\delta\mathbf{x}_{k(+)} = \delta\mathbf{x}_{k(-)} + \mathbf{K}_k(\delta\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k\delta\mathbf{x}_{k(-)})$ となるが、式 (7.43) を代入すると式 (7.46) となる。

7.7 可観測性

観測によって状態変数がすべて観測できることを可観測 (observable) と言う。本節では、カルマンフィルタが可観測か否かを判定する方法を記す。この方法の根拠は文献2を参照されたい。

システム方程式と観測方程式を、

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{w} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v}\end{aligned}$$

とする。ここに、状態変数 \mathbf{x} を n 行、係数行列 \mathbf{A} を n 行 n 列、観測行列 \mathbf{H} を m 行 n 列とする。ここで、可観測性行列 (observability matrix) を記号 \mathbf{U} で表し、

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{H}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (7.48)$$

と定義する。ここに、部分行列 $\mathbf{H}, \mathbf{H}\mathbf{A}, \dots, \mathbf{H}\mathbf{A}^{n-1}$ はいずれも m 行 n 列であるから、可観測性行列 \mathbf{U} のサイズは $(m \times n)$ 行 n 列である。この可観測性行列 \mathbf{U} のランクが状態変数の数 n であるなら可観測であり、ランクが n 未満であれば可観測ではない。なお、この判定法にシステムノイズ \mathbf{w} や観測ノイズ \mathbf{v} は関わらない。システムノイズ \mathbf{w} や観測ノイズ \mathbf{v} が大きいと正確な観測が困難となるが、それは本節の可観測性の問題とは別の問題である。

7.8 例題

機体の x 軸方向に加速度センサが固定されている。加速度センサのノイズはホワイトノイズ成分とバイアスのランダムウォーク成分を含んでいる。機体が水平面内で静止しているとき、その静止情報を観測値として、加速度センサのバイアスを推定するカルマンフィ

ルタを作る.

(1) システム方程式

機体の運動方程式は, 加速度センサの出力にバイアスが含まれる場合,

$$\dot{v} = f - b \tag{a}$$

と表される. ここに, v は x 軸方向の速度, f は加速度センサの出力, b は加速度センサ出力に含まれるバイアス成分である. この運動方程式の誤差方程式は,

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{v} &= w_1 - \delta b \\ \delta \dot{b} &= w_2 \end{aligned} \right\} \tag{b}$$

となる. ここに, δv は x 軸方向の速度誤差, δb は加速度センサのバイアス誤差, w_1 は加速度センサのホワイトノイズである. w_2 は加速度センサのバイアスのランダムウォークを生じさせるホワイトノイズ入力である. 行列を使って表すと,

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{v} \\ \delta \dot{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v \\ \delta b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \tag{c}$$

となる.

(2) 観測方程式

速度を観測する観測方程式は,

$$z = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \delta v \\ \delta b \end{bmatrix} + v \tag{d}$$

となる. ここに, v は観測ノイズである.

(3) 可観測性

可観測性行列 \mathbf{U} の式 (7.48) における係数行列 \mathbf{A} と観測行列 \mathbf{H} は,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = [1 \quad 0] \tag{e}$$

である。 \mathbf{HA} , \mathbf{HA}^2 を計算すると、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{HA} &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [0 \ -1] \\ \mathbf{HA}^2 &= [0 \ -1] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [0 \ 0] \end{aligned} \right\} \quad (\text{f})$$

となるから、可観測性行列 \mathbf{U} は、

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{HA} \\ \mathbf{HA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{g})$$

となる。この行列のランクは2であり、状態変数の数に一致するから、可観測と判定される。

(4) システム方程式の離散化

推移行列 Φ は式 (7.11) より、

$$\begin{aligned} \Phi &= \mathbf{I} + \mathbf{A}\Delta t \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{h})$$

となる。なお、式 (7.11) は時間間隔 Δt の2次以上の項を無視した近似式であるが、この例題の場合は、

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるから、厳密な式 (7.10) を使った推移行列とも言える。

システムノイズは式 (7.13) より、

$$\mathbf{w} = \Delta t \mathbf{B} \mathbf{w} = \Delta t \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (\text{i})$$

となる。ここに、

$$w_1 \sim N\left(0, \frac{N}{\sqrt{\Delta t}}\right), \quad w_2 \sim N\left(0, \frac{K}{\sqrt{\Delta t}}\right) \quad (j)$$

である。したがって、離散化されたシステム方程式は、

$$\begin{bmatrix} \delta v \\ \delta b \end{bmatrix}_{k(-)} = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v \\ \delta b \end{bmatrix}_{k-1(+)} + \Delta t \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (k)$$

となる。

(5) 時間更新

状態変数の時間更新は、

$$\left. \begin{aligned} v_{k(-)} &= v_{k-1(+)} + (f_k - b_{k(-)})\Delta t \\ b_{k(-)} &= b_{k-1(+)} \end{aligned} \right\} \quad (l)$$

となる。共分散行列 \mathbf{P} の時間更新の式 (7.44) の第 1 項を計算すると、

$$\begin{aligned} \Phi_{k-1} \mathbf{P}_{k-1(+)} \Phi_{k-1}^T &= \begin{bmatrix} 1 & -\Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}_{k-1(+)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\Delta t & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -\Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} - p_{12}\Delta t & p_{12} \\ p_{21} - p_{22}\Delta t & p_{22} \end{bmatrix}_{k-1(+)} \\ &= \begin{bmatrix} p_{11} - (p_{12} + p_{21})\Delta t + p_{22}\Delta t^2 & p_{12} - p_{22}\Delta t \\ p_{21} - p_{22}\Delta t & p_{22} \end{bmatrix}_{k-1(+)} \end{aligned} \quad (m)$$

となる。システムノイズの共分散行列は式 (i) より、

$$\Gamma_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k-1}^T = \langle \mathbf{w} \mathbf{w}^T \rangle = \Delta t^2 \begin{bmatrix} \langle w_1^2 \rangle & \langle w_1 w_2 \rangle \\ \langle w_2 w_1 \rangle & \langle w_2^2 \rangle \end{bmatrix} \quad (n)$$

となる。ここで、ノイズ w_1 と w_2 との間に相関が無いこと、および式 (j) より、

$$\mathbf{\Gamma}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{\Gamma}_{k-1}^T = \Delta t^2 \begin{bmatrix} \frac{N^2}{\Delta t} & 0 \\ 0 & \frac{K^2}{\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N^2 \Delta t & 0 \\ 0 & K^2 \Delta t \end{bmatrix} \quad (\text{o})$$

となる。よって、共分散行列 \mathbf{P} の時間更新の式 (7.44) は、

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}_{k(-)} = \begin{bmatrix} p_{11} - (p_{12} + p_{21})\Delta t + p_{22}\Delta t^2 & p_{12} - p_{22}\Delta t \\ p_{21} - p_{22}\Delta t & p_{22} \end{bmatrix}_{k-1(+)} + \begin{bmatrix} N^2 \Delta t & 0 \\ 0 & K^2 \Delta t \end{bmatrix} \quad (\text{p})$$

となる。

(6) 観測更新

観測ノイズの共分散行列は、この例題の場合はスカラーであり、

$$\mathbf{R}_k = \langle v^2 \rangle = R \quad (\text{q})$$

と表される。式 (7.45) よりカルマンゲインを求めると、

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k(-)} \mathbf{H}_k^T &= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} \\ \therefore \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k(-)} \mathbf{H}_k^T &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = p_{11} \\ \therefore \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k(-)} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k &= p_{11} + R \\ \therefore \mathbf{K}_k &= \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} (p_{11} + R)^{-1} = \frac{1}{p_{11} + R} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{r})$$

となる。速度の観測値が 0 (静止) であるから、観測誤差は、

$$\delta \mathbf{z}_k = 0 - v_{k(-)} = -v_{k(-)} \quad (\text{s})$$

となる。式 (7.46) より状態変数の観測更新は、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_{k(+)} &= \mathbf{x}_{k(-)} + \mathbf{K}_k \delta \mathbf{z}_k \\ \vdots \quad \left. \begin{aligned} v_{k(+)} &= v_{k(-)} - k_1 v_{k(-)} \\ b_{k(+)} &= b_{k(-)} - k_2 v_{k(-)} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (t)$$

となる。共分散行列 \mathbf{P} の観測更新は、式 (7.47) より、

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k(+)} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k(-)} \\ &= \left(\mathbf{I} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \mathbf{P}_{k(-)} \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & 0 \end{bmatrix} \right) \mathbf{P}_{k(-)} \\ &= \begin{bmatrix} 1-k_1 & 0 \\ -k_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}_{k(-)} \\ &= \begin{bmatrix} (1-k_1)p_{11} & (1-k_1)p_{12} \\ p_{21}-k_2p_{11} & p_{22}-k_2p_{12} \end{bmatrix}_{k(-)} \end{aligned} \quad (u)$$

となる。

(7) シミュレーション

Excel の乱数生成の機能を使って生成した加速度センサの出力とバイアスを図 7.2 に示す。ホワイトノイズのパワースペクトル密度の係数 $N = 1 \text{ mg}/\sqrt{\text{Hz}}$ ，ランダムウォークのパワースペクトル密度の係数 $K = 1 \text{ mg}/\sqrt{\text{s}}$ ，時間間隔 $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ とした。

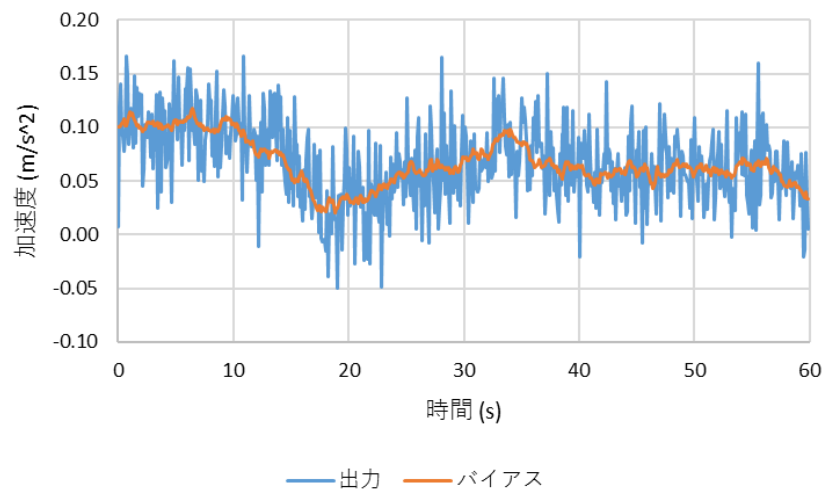


図 7.2 加速度センサの出力とバイアス

Excel でカルマンフィルタを作成して、バイアス推定を行った結果を図 7.3 に示す。推定値が真値を追跡できていることがわかる。速度 $v=0$ の観測誤差の分散 $R=0.001^2 \text{ (m/s)}^2$ とした。機体が静止しているとの前提より、 $R=0$ とすると、計算にエラーが生じやすい。式 (1) の分母が 0 または負となることがあるためである。

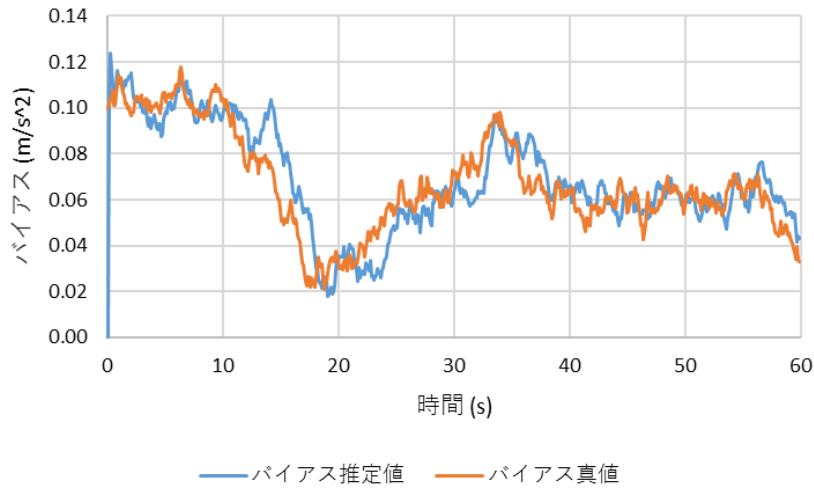


図 7.3 バイアスの真値と推定値

共分散行列 \mathbf{P} の時間変化を図 7.4 に示す。縦軸は対角要素 p_{11} と p_{22} の平方根である。 p_{22} の平方根はバイアス推定誤差 δb の偏差を意味し、約 0.01 m/s^2 に収束している。図示はしないが、非対角要素の p_{12} と p_{21} の値は等しく、符号は負となっている。

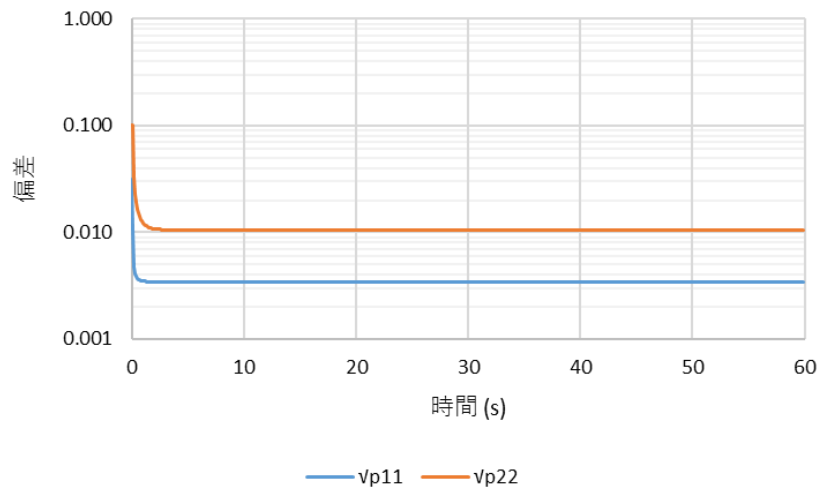


図 7.4 共分散行列 \mathbf{P} の時間変化

この例題のような考え方によってセンサのバイアスを推定する方法は、零速度更新 (zero velocity update) と呼ばれ、実際の慣性計測装置でもしばしば利用される。

参考文献

- 1) 加藤寛一郎, 最適制御入門 レギュレータとカルマンフィルタ, 東京大学出版会, 1987
- 2) 小郷寛, 美多勉, システム制御理論入門, 実教出版, 1979
- 3) 志甫徹, 誘導制御を伴う宇宙航行系プログラムの軌道推定に関する理論構成, 航空宇宙技術研究所報告 TR-1032, 航空宇宙技術研究所, 1989
- 4) K. R. Britting, Inertial Navigation Systems Analysis, John Wiley & Sons, 1971
- 5) J. A. Farrell, M. Barth, The Global Positioning System & Inertial Navigation, McGraw-Hill, 1998
- 6) A. Gelb, Applied Optimal Estimation, M. I. T. Press, 1974
- 7) M. S. Grewal, A. P. Andrews, Kalman Filtering Theory and Practice Using MATLAB, 2nd Edition, Wiley, 2001
- 8) M. S. Grewal, L. R. Weill, A. P. Andrews, Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration, Wiley, 2001
- 9) P. D. Groves, Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems, Artech House, 2008
- 10) R. M. Rogers, Applied Mathematics in Integrated Navigation Systems, 3rd Edition, AIAA, 2007
- 11) D. H. Titterton, Strapdown Inertial Navigation Technology, 2nd Edition, AIAA, 2004
- 12) R. G. Brown, P. Y. C. Hwang, Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering, 3rd Edition, John Wiley & Sons, 1997
- 13) R. E. Kalman, A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Trans. ASME, J. Basic Eng., vol.82D, pp. 35-45, 1960