衛星の運動

1. 衛星の運動の計算式

慣性座標系から見た地球とその周囲を回転する衛星を図 1 に示す．衛星とは、自然の衛星である月と，人工衛星とを含むものとする．図 1 の O が地球，P が衛星，K が近日点，E が遠日点である．地球は厳密には回転楕円体であるが，完全な球である仮定する．その場合，地球はその中心に質量が集中した質点とみなすことができる．また，慣性座標系で考えるから，地球や衛星の自転は計算に影響しない．

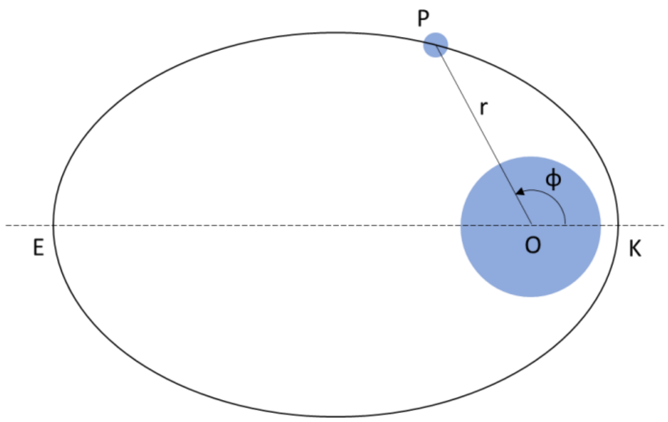

図 1 衛星の軌道

TB001「惑星の運動」に記した惑星軌道の計算式は，下表に示すように，惑星を衛星に，太陽を地球に置き換えると，衛星軌道の計算にもそのまま利用できる．以下の式(1)から式(9)までの導出は，TB001 を参照.

表 1 惑星と衛星の対応表

P	物体	惑星(planet)	衛星(satellite)
O	中心	太陽(Sun)	地球(Earth)
K	近点(pericenter, periapsis)	近日点(perihelion)	近地点(perigee)
E	遠点(apocenter, apoapsis)	遠日点(aphelion)	遠地点(apogee)

地球の中心を原点とする極座標（動径 r, 偏角 θ）において，衛星の軌道は，円錐曲線の式；，

$$r = \frac{l}{1 + e\cos\phi}, \quad \phi = \theta + c' \tag{1}$$

で表される．ここに，記号 l は半直弦，e は離心率，ϕ は真近点離角，c' は真近点離角の初期値である．半直弦 l は，長半径 a（楕円の長軸の 1/2 ）と離心率 e を使って，

$$l = a\left(1 - e^2\right) \tag{2}$$

と表される．また，この半直弦 l は，定数 h（面積速度の 2 倍），万有引力定数 G，地球の質量 M を使って，

$$l = \frac{h^2}{GM} \tag{3}$$

とも表される．図 2 に示すように，初期条件における動径を r_0，速度を v_0，速度が動径となす角度を α，真近点離角を c' とする．衛星が回る方向は反時計回り（偏角の正方向）とする．

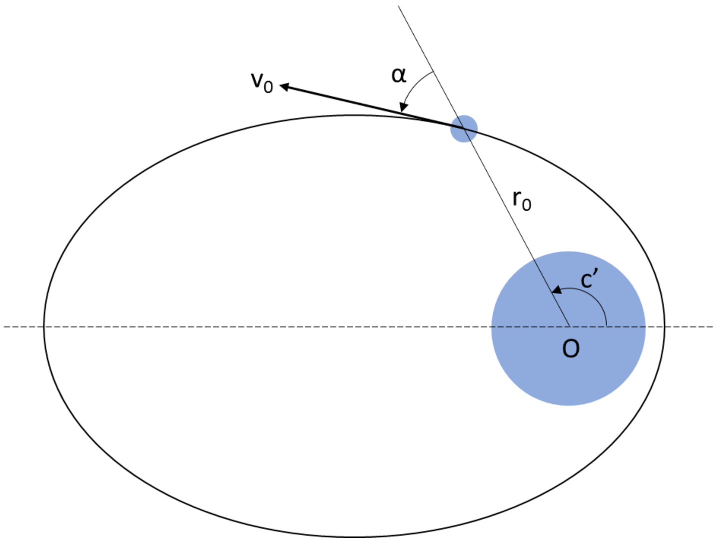

図 2 初期条件

式(3)の定数 h（面積速度の 2 倍）は，図 2 の初期条件を使って，

$$h = r_0 v_0 \sin\alpha \tag{4}$$

と表される．衛星の力学的エネルギー（運動エネルギーと位置エネルギーの和）の保存則は，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = E \tag{5}$$

と表される．ここに，記号 m は衛星の質量，v は速度，E は積分定数である．衛星が軌道を回る周期 T は，ケプラーの第 3 法則より，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} \tag{6}$$

と表される．衛星の速度 v は

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} \tag{7}$$

と表される．時刻 t と真近点離角 ϕ との関係は，離心近点離角 u をパラメータとして，

$$\begin{gathered} \frac{2\pi}{T}t = u - e\sin u \\ \tan\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\phi}{2} \end{gathered} \tag{8}$$

と表される．ただし，衛星が近地点にあるときの時刻を $t = 0$ とする．真近点離角 ϕ の初期値 c'（図 2 参照）は，

$$\begin{gathered} \frac{1}{r_0} - \frac{GM}{h^2} = \frac{GM}{h^2}\sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{mG^2M^2}}\cos c' \\ \frac{1}{2}m{v_0}^2 - \frac{GMm}{r_0} = E \end{gathered} \tag{9}$$

から計算することができる．

2．衛星の軌道

初期条件（r_0, v_0）から，楕円軌道の長半径 a を求める．速度の式(7)より，

$$v_0{}^2 = GM\left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}\right)$$

$$\therefore \frac{2}{r_0} - \frac{1}{a} = \frac{v_0{}^2}{GM}$$

$$\therefore \frac{1}{a} = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0{}^2}{GM} = \frac{2GM - r_0 v_0{}^2}{r_0 GM}$$

$$\therefore a = \frac{r_0 GM}{2GM - r_0 v_0{}^2} = \frac{r_0}{2 - \dfrac{r_0 v_0{}^2}{GM}}$$

$$\therefore a = \frac{r_0}{2 - X}, \quad X = \frac{r_0 v_0{}^2}{GM} \tag{10}$$

となる．ここに，無次元数のパラメータ X は，下式に示すように，初期条件における衛星の運動エネルギーと位置エネルギーの比の 2 倍を意味する．

$$X = \frac{r_0 v_0{}^2}{GM} = \frac{v_0{}^2}{\dfrac{GM}{r_0}} = \frac{m v_0{}^2}{\dfrac{GMm}{r_0}} = 2 \times \frac{\dfrac{1}{2} m v_0{}^2}{\dfrac{GMm}{r_0}} \tag{11}$$

式(10)で長半径 $a > 0$ となる条件から，軌道が楕円となるのは，$X < 2$ の場合であることがわかる．楕円軌道の離心率 e は，初期角度 α も使って，式(2)〜式(4)および式(10)より，

$$l = a\left(1 - e^2\right) = \frac{h^2}{GM}, \quad h = r_0 v_0 \sin\alpha$$

$$\therefore a\left(1 - e^2\right) = \frac{r_0{}^2 v_0{}^2 \sin^2\alpha}{GM} = r_0 X \sin^2\alpha$$

$$\therefore 1 - e^2 = \frac{r_0 X \sin^2\alpha}{a}$$

$$\therefore e^2 = 1 - \frac{r_0 X \sin^2\alpha}{a} = 1 - \frac{r_0 X \sin^2\alpha}{\dfrac{r_0}{2 - X}} = 1 - X\left(2 - X\right)\sin^2\alpha$$

$$\therefore e = \sqrt{1 - X\left(2 - X\right)\sin^2\alpha} \tag{12}$$

となる．上式より，初期角度 $\alpha = \pi/2$ で，$X = 1$ の場合，離心率 $e = 0$ となり、円軌道となることがわかる．

3. 宇宙速度

地球の半径を R とする．地球を回る円軌道(r= const.）の中で最小の速度 v_1 は，式(7)に r = a = Rを代入して，

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}} \tag{13}$$

となる．この速度 v_1 を第 1 宇宙速度と言う．初期位置が地球表面上（r_0 = R ）の場合、式(10)で導入したパラメータ X は、下式に示すように，初期速度 v_0 と第 1 宇宙速度 v_1 の二乗比でもある。

$$X = \frac{R{v_0}^2}{GM} = \frac{{v_0}^2}{\frac{GM}{R}} = \frac{{v_0}^2}{{v_1}^2} = \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^2$$

地球を回る軌道を脱出する速度 v_2 は，速度の式(7)に長半径 a →∞を代入して，

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \tag{14}$$

となる．この速度 v_2 を第 2 宇宙速度と言う．

4. 遠地点の高度・距離・時間

遠地点における動径 r_a は，

$$r_a = a(1+e) \tag{15}$$

であるから，遠地点の高度（地球表面からの距離）H_a は，地球の半径 Rを差し引いて，

$$H_a = a(1+e) - R \tag{16}$$

となる．真近点離角の初期値 c' をパラメータ X の関数として求める．まず，式(9)の右辺の$\sqrt{\ }$ の中の式を計算すると，

$$
\begin{aligned}
1+\frac{2Eh^2}{mG^2M^2} &= 1+\frac{2\left(\frac{1}{2}m{v_0}^2-\frac{GMm}{r_0}\right)h^2}{mG^2M^2} \\
&= 1+\left(\frac{m{v_0}^2}{mG^2M^2}-\frac{2GMm}{r_0mG^2M^2}\right)\left(r_0v_0\sin\alpha\right)^2 \\
&= 1+\left(\frac{{v_0}^2\cdot{r_0}^2{v_0}^2}{G^2M^2}-\frac{2{r_0}^2{v_0}^2}{r_0GM}\right)\sin^2\alpha \\
&= 1+\left(\left(\frac{r_0{v_0}^2}{GM}\right)^2-2\cdot\frac{r_0{v_0}^2}{GM}\right)\sin^2\alpha \\
&= 1+\left(X^2-2X\right)\sin^2\alpha \\
&= 1-X\left(2-X\right)\sin^2\alpha
\end{aligned}
$$

となる．また，式(9)の中の GM/h^2 の項は，

$$
\frac{GM}{h^2}=\frac{GM}{{r_0}^2{v_0}^2\sin^2\alpha}=\frac{1}{r_0X\sin^2\alpha}
$$

となる．これらの式を使って，式(9)を $\cos c'$ について解くと，

$$
\begin{aligned}
\cos c' &= \frac{\frac{1}{r_0}-\frac{GM}{h^2}}{\frac{GM}{h^2}\sqrt{1+\frac{2Eh^2}{mG^2M^2}}}=\frac{\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_0X\sin^2\alpha}}{\frac{1}{r_0X\sin^2\alpha}\sqrt{1-X\left(2-X\right)\sin^2\alpha}} \\
&= \frac{X\sin^2\alpha-1}{\sqrt{1-X\left(2-X\right)\sin^2\alpha}}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore c'=\cos^{-1}\left(\frac{X\sin^2\alpha-1}{\sqrt{1-X\left(2-X\right)\sin^2\alpha}}\right) \qquad (17)
$$

となる．初期値 c' の範囲は $0\leqq c'\leqq\pi$ とする．上式において，初期角度 $\alpha=\pi/2$ かつ $X=1$ の場合，右辺の括弧の中の分母と分子はともに 0 となり，初期値 c' は不定となる．円軌道の場合，動径の長さは一定で，近地点も遠地点もどことは特定できないからである．

上式の真近点離角の初期値 c' を使うと，初期位置から遠地点に達するまでの地球表面上の飛行距離 L_a は，

$$L_a = R\left(\pi - \left|c'\right|\right) \tag{18}$$

となる．初期条件の時刻 t_0 は，式(8)より，

$$\begin{aligned} &\tan\frac{u_0}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\phi_0}{2} \\ &\frac{2\pi}{T}t_0 = u_0 - e\sin u_0 \end{aligned} \tag{19}$$

から求めることができる．初期位置から遠地点に達するまでの飛行時間 T_a は，近地点から遠地点までの飛行時間（＝半周期 $T/2$ ）から，近地点から初期位置までの飛行時間$|t_0|$ を差し引いた時間であるから，

$$T_a = \frac{T}{2} - \left|t_0\right| \tag{20}$$

となる．

【計算例】

衛星軌道の計算例を以下に示す．以下の図の緑色の円は地球の外形であり，青色の点は衛星の軌道を示す．初期位置は，偏角 0 deg の地球表面上とする．軌道の青色の点と点との間の時間間隔は一定で，3 分間である．万有引力定数 G と地球の質量 M の積 GM の値を 3.986 $\times 10^{14}$ Nm^2/kg，地球の半径 R の値を 6371 km とした．ケプラーの方程式を解くには，Excel のソルバーを利用した．

図 3 に，初期角度 $\alpha = 90$ deg（地球表面の接線方向），初期速度 v_0 が第 1 宇宙速度 v_1（7.9 km/s）の場合の軌道を示す．軌道は，地球表面に沿った円軌道となる．周期 84 分で偏角 0 deg の初期位置に戻る．

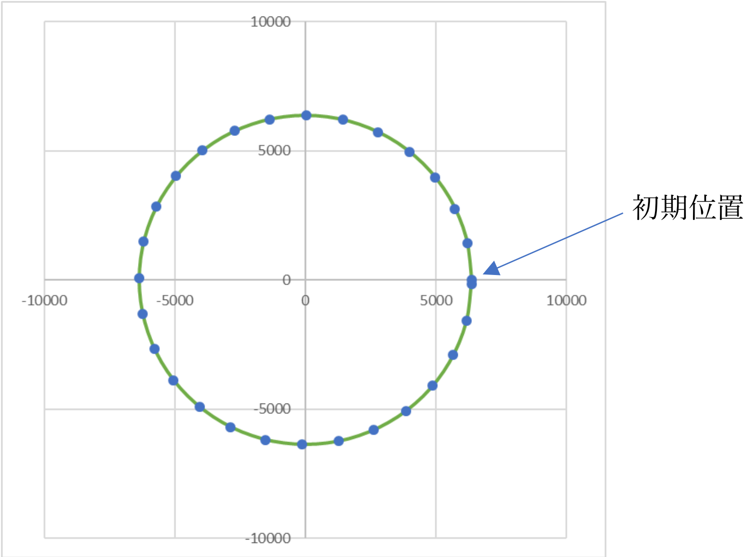

図 3　円軌道（$\alpha = 90$ deg,　$v_0 = v_1$ ）

図 4 および図 5 に，初期角度 $\alpha =$ 90 deg（地球表面の接線方向），初期速度 v_0 が第 1 宇宙速度 v_1 の 1.1 倍（8.7 km/s）および 1.2 倍（9.5 km/s）の場合の軌道を示す．地球の中心を焦点の一つとし，偏角 0 deg の初期位置を近地点，偏角 180 deg の位置を遠地点とする楕円軌道となる．周期 120 分および 201 分で，偏角 0 deg の初期位置（近地点）に戻る．軌道の点の間隔の違いから，左側の遠地点付近で衛星の速度が遅くなることがわかる．

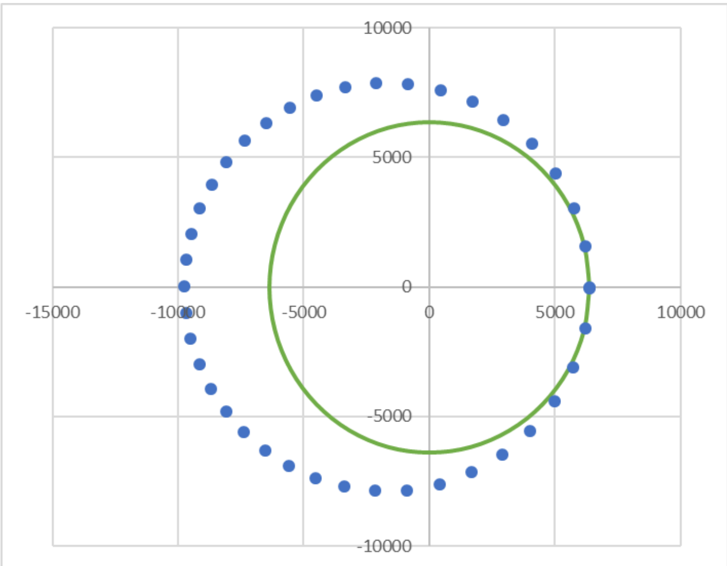

図 4　楕円軌道（$\alpha = 90$ deg,　$v_0 = 1.1 v_1$ ）

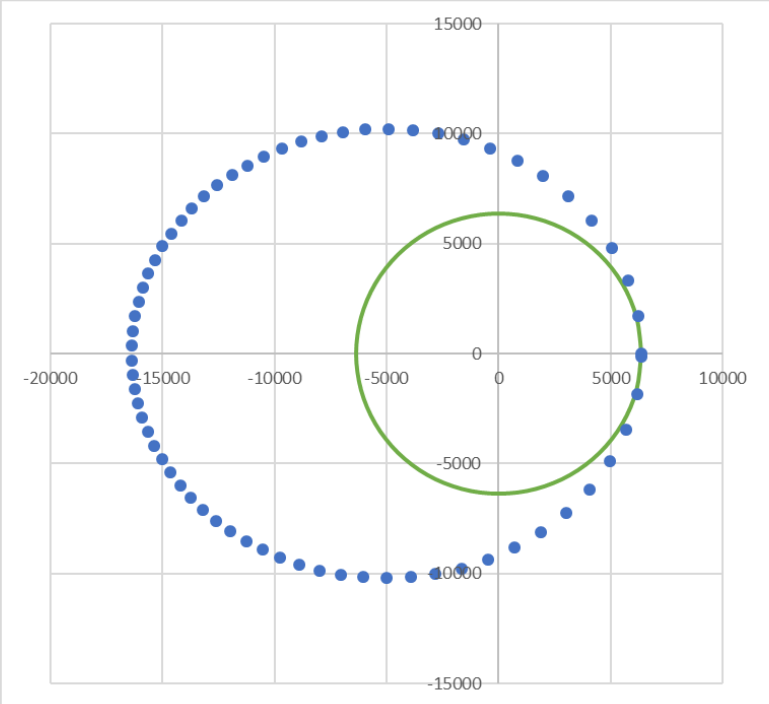

図 5 楕円軌道（$\alpha = 90$ deg， $v_0 = 1.2 v_1$ ）

図 6 に，初期角度 $\alpha = 45$ deg，初期速度 v_0 が第 1 宇宙速度 v_1（7.9 km/s）の場合の軌道を示す．地球の中心を焦点の一つとする楕円軌道であるが，地球を周回せずに帰還する．この場合の真近点離角の初期値 c' は，式(17)より，

$$\therefore c' = \cos^{-1}\left(\frac{1\times\frac{1}{2}-1}{\sqrt{1-1\times(2-1)\times\frac{1}{2}}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right) = \cos^{-1}\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

すなわち 135 deg となるから，近地点の偏角は－135 deg（図の左下方向），遠地点の偏角は 45 deg（図の右上方向）である．楕円は長軸に対して線対称であるから，衛星は，偏角が 45 ×2 = 90 deg の地点（地球を 1/4 周した地点）に 45 deg の角度で帰還する．その間の飛行時間は 61 分である．軌道の点の間隔の違いから，遠地点（右上）付近で衛星の速度が遅くなることがわかる．

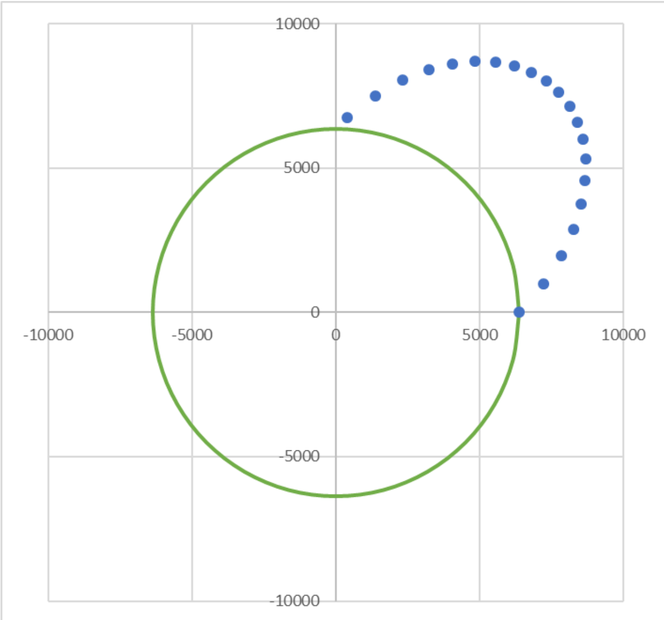

図 6 楕円軌道（$\alpha = 45$ deg, $v_0 = v_1$ ）

図 7 および図 8 は，同じく初期角度 $\alpha = 45$ deg で，初期速度 v_0 が第 1 宇宙速度 v_1 の 1.1 倍および 1.2 倍の場合の軌道を示す．地球の中心を焦点の一つとする楕円軌道であるが，地球を周回せずに帰還する．飛行時間は 98 分および 180 分である．遠地点（右上）の偏角は 57 deg および 69 deg である．

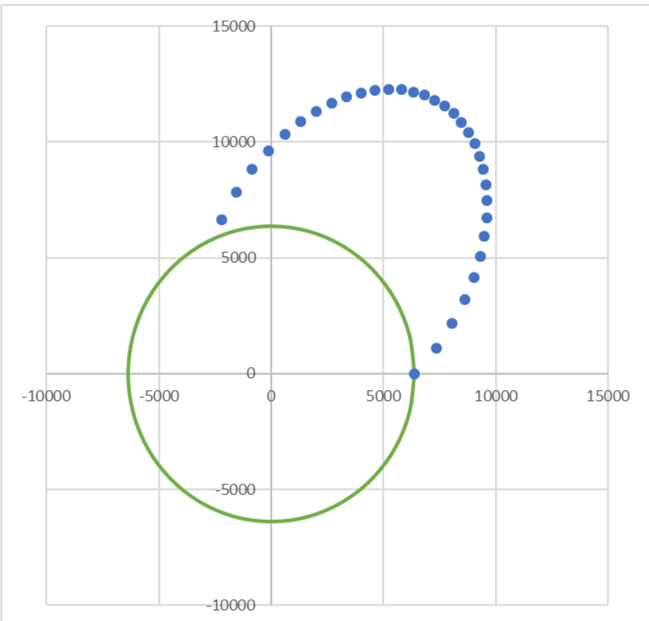

図 7 楕円軌道（$\alpha = 45$ deg, $v_0 = 1.1 v_1$ ）

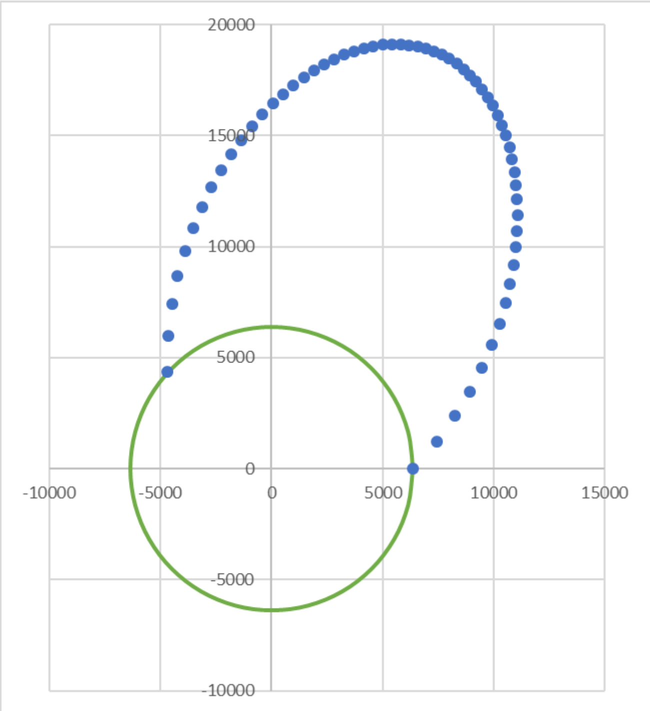

図 8 楕円軌道（$\alpha = 45$ deg, $v_0 = 1.2 v_1$ ）

関連文書

守屋富次郎，鷲津久一郎，力学概論　改訂版，培風館，1968
原島鮮，力学　三訂版，裳華房，1985
日本機械学会編，機械工学便覧　改訂第 5 版，1968