2　行列とベクトル

慣性計測技術では行列とベクトルを多く取り扱う．本書で必要とする範囲で，行列とベクトルに関する公式をまとめる．

2.1 行列とベクトルの定義

変数や定数を横方向の行 (row) と縦方向の列 (column) に四角に並べたものを行列 (matrix) と言う．行数と列数の組み合わせを行列のサイズと言う．特に行数と列数が等しい行列を正方行列 (square matrix) と言う．例えば，本書でもっとも多く使う 3 行 3 列の正方行列は，

$$\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

である．ここに，小文字の a は行列 $\mathbf{A}$ の要素を示し，要素 a の右下の添え字 ij は第 i 行 j 列の要素であることを示す．

要素がすべて 0 の行列を零行列 (zero matrix, null matrix) と言い，記号 $\mathbf{0}$ で表す．例えば，3 行 3 列の零行列 $\mathbf{0}$ は，

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

である．

正方行列において，左上から右下への対角線上の要素（対角要素）がすべて 1 で，その他の要素（非対角要素）がすべて 0 の行列を単位行列 (identity matrix) と言い，記号 $\mathbf{I}$ で表す．例えば，3 行 3 列の単位行列 $\mathbf{I}$ は，

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

である．単位行列のように非対角要素がすべて 0 の行列を対角行列 (diagonal matrix) と言う．

本書では，特にことわらない限り，ベクトル (vector) とは縦ベクトルのことを指す．例

えば，3 次元のベクトルは，

$$\mathbf{a}=(a_i)=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

である．ベクトルは n 行 1 列の行列とも言える．

2.2 行列の和と積

行列 **A** のサイズと行列 **B** のサイズが等しいときに限り，行列の和 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ が定義される．例えば，3 行 3 列の行列の和は，

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \\ &\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

である．行列の和は交換則と結合則が成り立つ．

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A} \\ &\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

行列 **A** の列数と行列 **B** の行数が等しいときに限り，行列の積 **AB** が定義される．例えば，3 行 3 列の行列の積は，

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \\ &\mathbf{AB}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

である．この式は，

$$\mathbf{AB}=\mathbf{C}=(c_{ij}),\quad c_{ij}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}b_{kj}=\begin{bmatrix}a_{i1} & a_{i2} & a_{i3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ b_{3j}\end{bmatrix}$$

と表すこともできる．すなわち，積 **AB** の第 i 行 j 列要素は，行列 **A** の第 i 行の横ベクトルと，行列 **B** の第 j 列の縦ベクトルとの積である．

行列の積の交換則は成り立たない．したがって，行列の積の順序には注意が必要である．行列の積は結合則と分配則が成り立つ．

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}\\ &\mathbf{ABC}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C}\\ &\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}\end{aligned}\right\}\tag{2.8}$$

行列 **A** の行数と列数が大きい場合は，縦，横に適当に分割して数個の小さい行列に分けると便利なことが多い．この小さい行列を部分行列，または副行列 (sub-matrix) と言う．例えば，行列 **A** を 9 行 9 列の行列，行列 **B** を 9 行 3 列の行列とすると，3 行 3 列の部分行列によって行列 **A** は 9 分割，行列 **B** は 3 分割できる．

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23}\\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33}\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\ \mathbf{B}_2\\ \mathbf{B}_3\end{bmatrix}$$

これらの行列 **A**, **B** の積は，部分行列をあたかも要素のように扱って，

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23}\\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\ \mathbf{B}_2\\ \mathbf{B}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_1+\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_2+\mathbf{A}_{13}\mathbf{B}_3\\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_1+\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_2+\mathbf{A}_{23}\mathbf{B}_3\\ \mathbf{A}_{31}\mathbf{B}_1+\mathbf{A}_{32}\mathbf{B}_2+\mathbf{A}_{33}\mathbf{B}_3\end{bmatrix}$$

と計算することができる．

2.3 転置行列

対角要素を対称軸として要素を入れ替えた行列を転置行列 (transpose matrix) と言う．例えば，3 行 3 列の行列の転置行列は，

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = (a_{ji}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

である．ここに，右上の添え字 T は転置行列を表す．転置行列は正方行列ではない行列に対しても定義される．縦ベクトルの転置行列は横ベクトルとなる．例えば，3 次元の縦ベクトルを転置すると，

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

となり，3 次元の横ベクトルになる．

転置しても元の行列と変わらない正方行列を対称行列 (symmetric matrix) と言う．本書で多く取り扱うことになる共分散行列は対称行列の一種である．

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$$

転置すると元の行列と符号が変わる正方行列を歪対称行列 (skew symmetric matrix)，または反対称行列，交替行列と言う．

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{A}$$

行列の積 **AB** の転置行列は，それぞれの転置行列を使って，

$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \tag{2.11}$$

となる．ここに，左辺と右辺で行列 **A**, **B** の順序が入れ替わる点に注意が必要である．この公式は正方行列ではない行列に対しても成り立つ．（問題 2.1 参照）

2.4 ベクトルの内積

ベクトルの内積 (inner product) は，同じサイズのベクトルに対して定義され，記号・で表す．内積の結果はスカラーであることから，スカラー積 (scalar product) とも言う．例えば，3 次元のベクトルの内積は，

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \tag{2.12}$$

である．この式から明らかなように，内積は交換則が成り立つ．

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} \tag{2.13}$$

内積は分配則も成り立つ．（問題 2.2 参照）

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} \tag{2.14}$$

内積は転置行列を使って，行列の積の形で表すことができる．例えば，3 次元のベクトルの内積は，

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}&=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}\\&=\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}\end{aligned} \tag{2.15}$$

と表される．ここに，左辺の $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$ や $\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}$ は行列の計算であるから，記号・は不要である．

直交座標系の 3 軸の単位ベクトルを **i**, **j**, **k** とすると，それらの内積は，

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=1,\quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=1,\quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=1\\&\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=0,\quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=0,\quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=0\end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

となる．同じベクトル同士の内積は 1 となり，直交するベクトル同士の内積は 0 となる．

ベクトルの長さ，すなわち要素の自乗和の平方根をノルム (norm) と言い，記号 $|\mathbf{a}|$ で表す．例えば，3 次元のベクトルのノルムは，

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2} \tag{2.17}$$

である．ノルムは，ベクトルの内積を使って表すこともできる．

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{\mathbf{a}^{\mathrm{T}} \mathbf{a}} \tag{2.18}$$

ベクトルの内積を使った公式に，

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c} = \left(\mathbf{c}\mathbf{b}^{\mathbf{T}}\right)\mathbf{a} = \left(\mathbf{c}\mathbf{a}^{\mathbf{T}}\right)\mathbf{b} \tag{2.19}$$

がある．この式の各項はベクトルであり，第 1 項の括弧の中はスカラー，第 2 項と第 3 項の括弧の中は 3 行 3 列の行列である．（問題 2.3 参照）

2.5 ベクトルの外積

3 次元のベクトルの外積 (cross product) は次のように定義され，記号 × で表す．外積の結果はベクトルであることから，ベクトル積 (vector product) とも言う．

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

外積の順序を変えると，

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 a_3 - b_3 a_2 \\ b_3 a_1 - b_1 a_3 \\ b_1 a_2 - b_2 a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 b_3 + a_3 b_2 \\ -a_3 b_1 + a_1 b_3 \\ -a_1 b_2 + a_2 b_1 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

となり，式 (2.20) と符号が変わる．したがって，外積は交換則が成り立たない．

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \tag{2.22}$$

外積は分配則が成り立つ．（問題 2.5 参照）

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c} \tag{2.23}$$

外積は，次のように行列の積の形で表すことができる．

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{bmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ a_3b_1-a_1b_3 \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}=(\mathbf{a}\times)\mathbf{b} \tag{2.24}$$

ここに，記号 **a** は 3 次元のベクトルを表すが，記号 $(\mathbf{a}\times)$ は 3 行 3 列の行列を表す．このような行列を外積行列と言う．外積行列は転置すると符号が変わる歪対称行列である．

Example

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},\quad (\mathbf{a}\times)=\begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ベクトルの外積を 2 回行う計算をベクトル三重積と言う．ベクトル三重積に対して，次のような結合則は成り立たない点に注意が必要である．

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\neq(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$$

したがって，$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ という括弧のない三重積の表記は使われない．例として，ベクトル **a**, **b**, **c** がそれぞれ，直交座標系の単位ベクトル **i**, **j**, **j** のとき，

$$\mathbf{i}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{j})=\mathbf{i}\times\mathbf{0}=\mathbf{0}$$
$$(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}$$

となり，確かに結果が異なることがわかる．

ベクトル三重積の公式は,

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} \tag{2.25}$$

であり，この式の各項はベクトルである．（問題 2.6 参照）　ベクトル三重積に関して,

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{0} \tag{2.26}$$

の関係も成り立つ．（問題 2.7 参照）

2.6 行列式

行列式 (determinant) は正方行列に対して定義される．正方行列 **A** の行列式はスカラーであり，次の行展開（または列展開）の公式を使うと，1 行 1 列だけ小さい行列式の和に変換できる．例えば，n 行 n 列の正方行列 **A** を第 i 行について行展開すると，

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} M_{ij} = a_{i1} M_{i1} + a_{i2} M_{i2} + \cdots + a_{in} M_{in} \tag{2.27}$$

となる．ここに，記号 |**A**| または det (**A**) は行列式を表す．記号 M_{ij} は行列 **A** の要素 a_{ij} の余因子を表す．余因子とは，行列 **A** から第 i 行と第 j 列を除いた $(n-1)$ 行 $(n-1)$ 列の正方行列の行列式に符号 $(-1)^{i+j}$ をかけたものである．この公式を使うと，2 行 2 列の行列 **A** の行列式は，

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}| \\
&= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
\end{aligned}$$

となる．2 行目は行列 **A** を第 1 行について行展開したところである．同様に，3 行 3 列の行列 **A** の行列式は，

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}
\end{aligned}$$

となる．2 行目は行列 **A** を第 1 列について列展開したところである．3 行目の式はサラスの方法（サラスの公式）とも言う．

行列式について，次のような関係がある．

---

(1) 正方行列 **A** の転置行列の行列式は，もとの正方行列 **A** の行列式に等しい．

$$\left|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right| = \left|\mathbf{A}\right| \tag{2.28}$$

(2) 同じサイズの正方行列 **A** と **B** の積 **AB** も正方行列であり，積の行列式は，それぞれの行列式の積である．（問題 2.9 参照）

$$\left|\mathbf{AB}\right| = \left|\mathbf{A}\right|\left|\mathbf{B}\right| \tag{2.29}$$

(3) 正方行列の二つの行を入れ替えると行列式の符号が変わる．列についても同様．例えば，

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc)$$

(4) 正方行列のある行に別の行の k 倍を加えた行列の行列式は，もとの行列の行列式に等しい．列についても同様．例えば，

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a + kb & b \\ c + kd & d \end{vmatrix} &= (a + kb)d - b(c + kd) \\ &= ad - bc + kbd - kbd \\ &= ad - bc \end{aligned}$$

(5) 正方行列の一つの行を k 倍すると行列式は k 倍になる．列についても同様．例えば，

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad \begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k(ad - bc)$$

(6) n 行 n 列の正方行列のすべての要素を k 倍すると行列式は k^n 倍になる．例えば，

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad \begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{vmatrix} = k^2(ad - bc)$$

ベクトルの内積と外積を組み合わせた $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ の三重積は，結果がスカラーであることから，スカラー三重積と言われる．スカラー三重積は行列式を使って，

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} \tag{2.30}$$

と表される．この式の絶対値は，ベクトル **a**, **b**, **c** を原点から出る 3 辺とする平行六面体の体積を意味する．（問題 2.10 参照）　スカラー三重積の順序を入れ替えると，

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \tag{2.31}$$

の式が成り立つ．（問題 2.11 参照）

2.7 逆行列

正方行列 **A** とその逆行列 (inverse matrix) $\mathbf{A}^{-1}$ の積は，同じサイズの単位行列 **I** となる．

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I} \tag{2.32}$$

ここに，右上の添え字 -1 は逆行列を表す．逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ を求める式は，

$$\mathbf{A}^{-1}=\left(\frac{M_{ji}}{|\mathbf{A}|}\right)=\frac{1}{|\mathbf{A}|}(M_{ji}) \tag{2.33}$$

である．ここに記号 M_{ij} は式 (2.27) において定義した余因子であるが，添え字の順序が ij ではなく ji と逆になる点に注意が必要である．分母に行列式 $|\mathbf{A}|$ があることからわかるように，行列式 $|\mathbf{A}|$ が 0 の行列に対して行列式は定義されない．この公式を使うと，2 行 2 列の行列 **A** の逆行列は，

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$
$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix}M_{11} & M_{21}\\ M_{12} & M_{22}\end{bmatrix}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}$$

となる．同様に，3 行 3 列の行列 **A** の逆行列は，

$$
\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix} M_{11} & M_{21} & M_{31} \\ M_{12} & M_{22} & M_{32} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{bmatrix}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix} a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32} & a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22} \\ a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33} & a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31} & a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23} \\ a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31} & a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \end{bmatrix}
$$

となる．

正方行列の積 **AB** の逆行列は，それぞれの行列の逆行列を使って，

$$
(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \tag{2.34}
$$

となる．ここに，左辺と右辺で行列 **A**, **B** の順序が入れ替わる点に注意が必要である．（問題 2.12 参照）

2.8 直交行列

本書で多く取り扱うことになる方向余弦行列 **C** は 3 行 3 列の直交行列 (orthogonal matrix) の一種である．

直交行列には，次のような関係がある．

---

(1) 各列ベクトルのノルムは 1 である．各行ベクトルについても同様．例えば，方向余弦行列 **C** の第 1 列ベクトルでは，

$$
\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix}={c_{11}}^2+{c_{21}}^2+{c_{31}}^2=1 \tag{2.35}
$$

(2) 異なる列ベクトルの内積は 0 である．すなわち，異なる列ベクトルは互いに直交している．異なる行ベクトルについても同様．例えば，方向余弦行列 **C** の第 1 列ベクトルと第 2 列ベクトルとの内積は，

$$\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{bmatrix} = c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} + c_{31}c_{32} = 0 \tag{2.36}$$

(3) 直交行列の第 1 列ベクトルと第 2 列ベクトルとの外積は第 3 列ベクトルとなる．同様に，第 2 列ベクトルと第 3 列ベクトルとの外積は第 1 列ベクトルとなる．また，第 3 列ベクトルと第 1 列ベクトルとの外積は第 2 列ベクトルとなる．行ベクトルについても同様．例えば，方向余弦行列 **C** の第 1 列ベクトルと第 2 列ベクトルとの外積は，

$$\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -c_{31} & c_{21} \\ c_{31} & 0 & -c_{11} \\ -c_{21} & c_{11} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{32}c_{21} - c_{31}c_{22} \\ c_{12}c_{31} - c_{11}c_{32} \\ c_{22}c_{11} - c_{21}c_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

(4) 直交行列の行列式は 1 である．例えば，方向余弦行列 **C** の行列式は，

$$|\mathbf{C}| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = 1 \tag{2.38}$$

(5) 直交行列の逆行列は転置行列に等しい．例えば，方向余弦行列 **C** の逆行列は，

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

2.9 行列のランク

行列から k 個の行と k 個の列を選んでサイズ k の正方部分行列を作り，その行列式を求めるとする．このとき，行列式が 0 でない最大の正方部分行列のサイズ k を，その行列のランク (rank) または階数と言う．ランクは整数である．

Example

行列；

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

のランクは，rank (**A**) = 1, rank (**B**) = 2, rank (**C**) = 3 である．

ランクには次のような関係がある．

(1) 行列のランクは，行列の行数，列数を超えない．

(2) 転置行列のランクは，もとの行列のランクに等しい．

(3) 行列の二つの行を入れ替えてもランクは変わらない．列についても同様.

(4) 行列のある行を定数倍してもランクは変わらない．列についても同様．ただし，0 倍を除く．

(5) 行列のある行に別の行の定数倍を加えてもランクは変わらない．列についても同様.

(6) サイズ k の正方行列の行列式が 0 でないならば，その正方行列のランクは k である．行列式が 0 ならば，その正方行列のランクは k より小さい．

(7) 行列の積 $\mathbf{AB}$ のランクは，行列 $\mathbf{A}$ のランク，行列 $\mathbf{B}$ のランクを超えない．

(8) 行列の積 $\mathbf{AB}$ のランクは，行列 $\mathbf{A}$ の行列式が 0 でないならば，行列 $\mathbf{B}$ のランクに等しい．行列 $\mathbf{B}$ の行列式が 0 でないならば，行列 $\mathbf{A}$ のランクに等しい．

(9) 行数＞列数の縦長の行列 $\mathbf{A}$ のランクは，転置行列 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ と行列 $\mathbf{A}$ との積 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ の行列式が 0 でないならば，行列 $\mathbf{A}$ の列数に等しい．

Example

行列；

$$
\mathbf{D}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

のランクを求めるとき，以下のように変形してもランクは変わらない．

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

ここに，1 番目の変形では，第 1 行と第 6 行を入れ替えた．2 番目の変形では，第 2 行と第 3 行を入れ替えた．3 番目の変形では，第 4 行に第 3 行を加えた．このように変形することにより行列 **D** のランクは 3 であることがわかる．変形の順序は何通りもあるが，最終的なランクは変わらない．また，(9) 項の方法を使うと，

$$
\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2\neq 0
$$

となるから，行列 **D** のランクは列数の 3 に等しい．

2.10 行列と微分

行列の微分とは，すべての要素を微分したものである．例えば，3 行 3 列の行列 **A** の時間微分は，

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{d}{dt}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \dot{a}_{11} & \dot{a}_{21} & \dot{a}_{31} \\ \dot{a}_{12} & \dot{a}_{22} & \dot{a}_{32} \\ \dot{a}_{13} & \dot{a}_{23} & \dot{a}_{33} \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

である．ベクトルの微分についても同様．

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{d}{dt}\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \dot{a}_3 \end{bmatrix}$$

スカラーを行列で微分することができる．例えば，スカラーμを 3 行 3 列の行列 **A** で微分する場合は，

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &\frac{d\mu}{d\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{da_{11}} & \dfrac{d}{da_{12}} & \dfrac{d}{da_{13}} \\ \dfrac{d}{da_{21}} & \dfrac{d}{da_{22}} & \dfrac{d}{da_{23}} \\ \dfrac{d}{da_{31}} & \dfrac{d}{da_{32}} & \dfrac{d}{da_{33}} \end{bmatrix} \mu = \begin{bmatrix} \dfrac{d\mu}{da_{11}} & \dfrac{d\mu}{da_{12}} & \dfrac{d\mu}{da_{13}} \\ \dfrac{d\mu}{da_{21}} & \dfrac{d\mu}{da_{22}} & \dfrac{d\mu}{da_{23}} \\ \dfrac{d\mu}{da_{31}} & \dfrac{d\mu}{da_{32}} & \dfrac{d\mu}{da_{33}} \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{2.41}$$

と定義され，行列 **A** と同じサイズの行列となる．

2.11 行列のトレース

行列のトレース (trace) は，正方行列に対して定義され，行列の対角要素の和である．跡，対角和とも言う．トレースはスカラーである．例えば，3 行 3 列の行列 **A** のトレースは，

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &\mathrm{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} \end{aligned}\right\} \tag{2.42}$$

である．ここに，記号 Tr はトレースを表す．

転置行列のトレースはもとの行列のトレースに等しい.

$$\mathrm{Tr}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)=\mathrm{Tr}(\mathbf{A}) \tag{2.43}$$

同じサイズの正方行列 **A** と **B** の和のトレースは,

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathrm{Tr}(\mathbf{A})+\mathrm{Tr}(\mathbf{B}) \tag{2.44}$$

となる. 同じサイズの正方行列の積 **AB** のトレースに対して,

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{AB})=\mathrm{Tr}(\mathbf{BA})=\mathrm{Tr}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right)=\mathrm{Tr}\left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right) \tag{2.45}$$

の式が成り立つ.（問題 2.16 参照）

トレースはスカラーであるから, 2.10 項のスカラーの微分公式を使うことができる. 行列 **A** のトレース Tr (**A**) を行列 **A** で微分すると単位行列 **I** となる.（問題 2.17 参照）

$$\frac{d}{d\mathbf{A}}\mathrm{Tr}(\mathbf{A})=\mathbf{I} \tag{2.46}$$

式 (2.43) と組み合わせると, 次の式も成り立つ.

$$\frac{d}{d\mathbf{A}}\mathrm{Tr}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)=\mathbf{I},\quad \frac{d}{d\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}\mathrm{Tr}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)=\mathbf{I}$$

同じサイズの行列 **A**, **B** の積 **AB** のトレースを行列 **A** で微分すると, 行列 **B** の転置行列となる.（問題 2.18 参照）

$$\frac{d}{d\mathbf{A}}\mathrm{Tr}(\mathbf{AB})=\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \tag{2.47}$$

式 (2.45) と組み合わせると, 次の式も成り立つ.

$$\frac{d}{d\mathbf{A}}\mathrm{Tr}(\mathbf{BA})=\frac{d}{d\mathbf{A}}\mathrm{Tr}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right)=\frac{d}{d\mathbf{A}}\mathrm{Tr}\left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$$

これらの式の行列 $\mathbf{B}$ を転置行列 $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ に置き換えると次の式も成り立つ.

$$\frac{d}{d\mathbf{A}}\mathrm{Tr}\left(\mathbf{A}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right)=\frac{d}{d\mathbf{A}}\mathrm{Tr}\left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)=\frac{d}{d\mathbf{A}}\mathrm{Tr}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)=\frac{d}{d\mathbf{A}}\mathrm{Tr}\left(\mathbf{B}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)=\mathbf{B}$$

同じサイズの行列 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ の積 $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ のトレースを行列 $\mathbf{A}$ で微分すると,

$$\frac{d}{d\mathbf{A}}\mathrm{Tr}\left(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)=\mathbf{A}\mathbf{B}+\mathbf{A}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}\left(\mathbf{B}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right) \tag{2.48}$$

となる.（問題 2.19 参照）

2.12 便利な Excel 関数

表計算ソフトの Excel は行列を取り扱う計算に非常に便利である. また, 本章に説明した行列計算の多くが, 表 2.1 のように Excel 関数として準備されている.

表 2.1 行列計算に便利な Excel 関数

計算	Excel 関数	補足
行列の積	MMULT (配列 1, 配列 2)	引数の配列 1 は左側の行列, 配列 2 は右側の行列
転置行列	TRANSPOSE (配列)	
ベクトルの内積	SUMPRODUCT (配列 1, 配列 2)	
行列式	MDETERM (配列)	
逆行列	MINVERSE (配列)	

問題

問題 2.1　転置行列の公式 (2.11) を証明せよ．

問題 2.2　内積の分配則の公式 (2.14) を証明せよ．

問題 2.3　ベクトルの内積を使った公式 (2.19) を証明せよ．

問題 2.4　二つのベクトル **a**, **b** のなす角度を θ とすると，内積に関する次の式が成り立つことを示せ．

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta$$

問題 2.5　外積の分配則の式 (2.23) を証明せよ．

問題 2.6　ベクトル三重積の公式 (2.25) を証明せよ．

問題 2.7　ベクトル三重積の公式 (2.26) を証明せよ．

問題 2.8　二つのベクトル **a**, **b** のなす角度を θ とすると，外積に関する次の式が成り立つことを示せ．この式の右辺は，ベクトル **a**, **b** を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の面積を意味する．

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,|\sin\theta|$$

問題 2.9　3 行 3 列の行列に対して，行列式の公式 (2.29) を証明せよ．

問題 2.10　スカラー三重積の公式 (2.30) を証明せよ．

問題 2.11　スカラー三重積の公式 (2.30) を使って，式 (2.31) を証明せよ．

問題 2.12　逆行列の公式 (2.34) を証明せよ．

問題 2.13　方向余弦行列 **C** のランクを求めよ．

問題 2.14　外積行列 $(\mathbf{a}\times)$ のランクを求めよ．

問題 2.15　次の行列のランクを求めよ．

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&0&2\end{bmatrix}\qquad \mathbf{E}=\begin{bmatrix}1&2&0\\1&2&0\\1&2&0\end{bmatrix}\qquad \mathbf{F}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{bmatrix}\qquad \mathbf{H}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad \mathbf{J}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&1&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\qquad \mathbf{L}=\begin{bmatrix}1&0&3\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}\qquad \mathbf{M}=\begin{bmatrix}0&1&0\\2&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

問題 2.16　3 行 3 列の行列に対して，行列のトレースの公式 (2.45) を証明せよ．

問題 2.17　3 行 3 列の行列に対して，行列のトレースの微分の公式 (2.46) を証明せよ．

問題 2.18　3 行 3 列の行列に対して，行列のトレースの微分の公式 (2.47) を証明せよ．

問題 2.19　3 行 3 列の行列に対して，行列のトレースの微分の公式 (2.48) を証明せよ．

参考文献

1) 小郷寛，美多勉，システム制御理論入門，実教出版，1979

2) E. Kreyszig, Applied Engineering Mathematics 2nd Edition, John Wiley & Sons, 1967（E. クライツィグ，田島一郎・近藤次郎訳，技術者のための高等数学第 2 版，2. 線形代数と応用解析，培風館，1970）